# XXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

**теоретический тур, решения**

**2014**

**15 февраля**

## *9 класс*

**1.** Покажите, что угловое перемещение любой внешней планеты относительно звезд за один земной год для земного наблюдателя тем меньше, чем больше радиус орбиты планеты.

**Решение:**

Пусть $P$ — период обращения планеты вокруг Солнца, а $P_\oplus$ — период обращения Земли. Тогда через один земной год планета пройдет $P_\oplus/P$ часть своей орбиты и переместится на угол $\varphi = P_\oplus/P \cdot 2\pi$ радиан при наблюдении с Солнца. Период планеты и радиус ее орбиты $r$ связаны соотношением $P^2 = r^3$ (если период измеряется в годах, а радиус орбиты — в астрономических единицах), поэтому расстояние $R$, которое планета пройдет за один земной год, составляет

$$R = 2\pi \frac{P_\oplus}{r^{3/2}}$$

и, очевидно, уменьшается с ростом радиуса орбиты планеты.

Если мы наблюдаем все планеты в одинаковых условиях (и в первый, и во второй момент наблюдения они находятся, например, либо в окрестности противостояния, либо в окрестности соединения), то расстояние, на котором мы наблюдаем планеты, растет с увеличением радиуса орбиты, а перемещение в пространстве, наоборот, уменьшается. В этом случае доказываемое утверждение становится очевидным.

Однако возможен «неудобный» случай: когда планета с меньшим радиусом орбиты находится в окрестности соединения, а планета с большим радиусом орбиты — в окрестности противостояния. Если в таком случае более близкая к Солнцу планета окажется сравнительно дальше от Земли, то, возможно, ее угловое перемещение окажется меньше.

Но то, что подобная ситуация невозможна, легко проверить простейшим перебором. Рассмотрим Марс и Юпитер. Радиус орбиты Марса — около 1.5 а.е., радиус орбиты Юпитера — около 5 а.е. Поэтому минимальное расстояние от Земли до Юпитера (4 а.е.) все равно больше, чем максимально возможное расстояние от Земли до Марса (2.5 а.е.). Следовательно, для них интересующее нас утверждение также верно. Несложно убедиться, что для всех других пар внешних планет ситуация оказывается аналогичной — максимальное расстояние от Земли до более близкой к Солнцу планеты всегда меньше, чем минимальное расстояние до более далекой. Следовательно, утверждение доказано.

**2.** В 2014 году будет наблюдаться всего четыре затмения: два лунных, два солнечных; в октябре и апреле. Как Вы думаете, какого типа они будут? Обоснуйте свой ответ.

**Решение:**

Как известно, благоприятные периоды для наступления затмений бывают два раза в год с разницей чуть меньше, чем в полгода, когда Луна и Солнце оказываются вблизи узлов лунной орбиты. Причем длительность периодов, благоприятных для наблюдения солнечных затмений чуть больше синодического месяца (около 33 суток), а лунных — меньше синодического месяца (около 21 суток). Таким образом, солнечных затмений в одном году в принципе, при самых благоприятных условиях, может произойти 5 (а как минимум 2), а лунных — всего 3 (но может не быть и ни одного).

Если солнечное затмение случается в самом начале благоприятного периода, то через синодический месяц снова случится солнечное затмение, но в этом случае они оба будут частными с очень маленькой фазой, а между ними произойдет полное лунное. Похожая ситуация повторится примерно через полгода и таким образом в году будет наблюдаться четыре частных с малой фазой (или три частных, два из которых с малой фазой, а одно — с большой) солнечных затмения и два полных, причем практически центральных, лунных. Если же первая пара частных с малой фазой солнечных затмений в году происходит в начале январе - начале февраля, то вторая подобная пара может произойти в начале июля - начале августа, и возможна также еще пара подобных затмений, одно из которых еще попадает в этот же календарный год и происходит в самом конце декабря (второе затмение этой пары произойдет уже в январе следующего года).

Если же в году наблюдается ровно два солнечных затмения и два лунных затмения, причем не в январе или декабре, это означает, что в каждый из благоприятных затмениям периодов происходит ровно одно лунное и одно солнечное затмение. Следовательно, они случаются, когда Солнце с Луной оказываются довольно близко от узлов лунной орбиты, и таким образом все затмения будут либо полными (как вариант, в случае солнечного, кольцеобразными), либо частными с большой фазой.

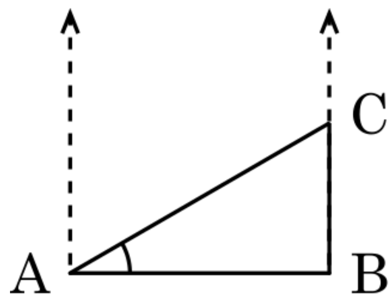
Собственно, оба лунных затмения 2014 года будут полными, а из солнечных апрельское будет кольцеобразным, а октябрьское — частным с фазой 0.8.

**3.** Оцените максимально возможную разность расстояний от Полярной звезды до Земли и до Луны.

**Решение:**

Полярная звезда называется «полярной» потому, что располагается практически в Полюсе мира — в направлении, совпадающем с направлением земной оси.

Известно, что плоскость земного экватора наклонена к плоскости земной орбиты на угол $\varepsilon = 23^\circ.5$, а плоскость орбиты Луны наклонена к плоскости орбиты Земли на $5^\circ$. Отсюда следует, что максимально возможный угол между плоскостью земного экватора и направлением Земля–Луна составляет $28^\circ.5$.




Изобразим на рисунке Луну ($C$), Землю ($A$) и направление на Полярную звезду в соответствующей ситуации, отрезок $AB$ соответствует плоскости земного экватора. Поскольку Полярная звезда находится очень далеко (во всяком случае, расстояние до нее намного превышает расстояние между Землей и Луной), то можно считать, что направления на Полярную звезду с Земли и с Луны параллельны друг другу. Тогда изображенный на рисунке треугольник $ABC$ оказывается прямоугольным, причем его гипотенуза $AC$ — это расстояние от Земли до Луны (которое примерно равно $4 \cdot 10^5$ км), а угол $A$ равен $28^\circ.5 \approx 30^\circ$. Известно, что длина катета в прямоугольном треугольнике, лежащего напротив угла в $30^\circ$, равна половине длины гипотенузы, поэтому отрезок $BC$ равен примерно $2 \cdot 10^5$ км. Однако это как раз разность между расстояниями от Полярной звезды до Земли и до Луны, т.е. искомый ответ.

**4.** Считается, что источниками длинных гамма-всплесков являются вспышки сверхновых определенного типа. Однако при этом оптическое излучение вспышки распространяется во всех направлениях, а гамма-излучение испускается только в двух направленных в противоположные стороны узких конусах с угловым диаметром 5°. Предполагая, что мы можем наблюдать все подобные объекты, находящиеся на расстояниях, не превышающих 500 Мпк, оцените, во сколько раз чаще можно будет наблюдать сверхновые этого типа, чем длинные гамма-всплески.

**Решение:**

Если рассмотреть шар радиуса 500 Мпк вокруг сверхновой, то из условия следует, что вспышку сверхновой можно будет наблюдать в любой точке этого шара, а гамма-всплеск — только в точках, попадающих в два конуса. Соответственно, если возможные наблюдатели расположены в пространстве равномерно, то отношение числа наблюдателей, увидевших гамма-всплеск, к числу наблюдателей, увидевших только вспышку сверхновой, равно отношению суммарного объема двух конусов к общему объему шара $q$.

Однако вычислять объемы конусов неудобно. Вместо этого рассмотрим тонкий сферический слой, окружающий сверхновую. Отношение объема, «вырезаемого» из него двумя конусами, к общему объему слоя будет равно той же величине $q$ — в самом деле, для любого радиуса слоя площадь поверхности слоя и площадь, вырезаемая конусами, пропорциональны квадрату радиуса, следовательно, их отношение с радиусом не меняется. А это означает, что мы можем вместо шара рассмотреть сферу с центром в месте вспышки и сравнивать не объемы, а площади поверхности сферы и ее частей, выражая их размеры в угловых единицах, отношение $q$ при таком подсчете не изменится.

Заметим также, что для одного наблюдателя, вокруг которого в случайном направлении и со случайной ориентацией вспыхивают сверхновые, будет верно то же самое утверждение — отношение частот наблюдаемых вспышек гамма-всплесков и сверхновых будет равно тому же отношению $q$ суммарного объема конусов к объему шара.

Если угловой диаметр конуса равен $d = 5°$, то площадь, «вырезаемая» им на сфере, оказывается равной $\pi/4 \cdot d^2 \approx 20$ квадратных градусов (квадратов со стороной, равной 1°). Площадь всей сферы в тех же единицах оценить несколько сложнее. Некоторые могут помнить, что она составляет около 40 тыс. кв. градусов, но можно и оценить это число, вспомнив, как выглядит развертка сферы на плоскость (например, обычная географическая карта) и приняв, что площадь сферы составляет $180° \times 360°$. Оценка получится завышенной в полтора раза, но для грубого приближения это допустимо.

В итоге получаем, что два конуса «вырезают» на сфере около 40 квадратных градусов, площадь всей сферы примерно в $10^3$ раз больше, следовательно, и вспышки сверхновых можно будет наблюдать в те же самые $10^3$ раз чаще, чем гамма-всплески.

**5.** Полная амплитуда изменения звездной величины геосинхронного спутника (с периодом обращения, в точности равном суткам) составляет $5^m$. Оцените минимальную высоту спутника над поверхностью Земли.

**Решение:**

Поскольку период обращения спутника $P$ равен суткам, большую полуось его орбиты $a$ можно вычислить, воспользовавшись III законом Кеплера

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

где $G$ — гравитационная постоянная, $M$ — масса Земли. Можно, впрочем, сразу сообразить, что у всех спутников с одинаковым периодом большая полуось орбиты будет одинаковой, поэтому искомая величина $a$ совпадает с радиусом орбиты геостационарного спутника (многим участникам олимпиады известным). В любом случае получится $a \approx 43 \cdot 10^6$ м, или примерно 6.6 радиусов Земли.

Поскольку спутник движется по эллиптической орбите с некоторым эксцентриситетом $e$, его перицентрическое расстояние может быть записано как $r_\pi = a\,(1 - e)$, а апоцентрическое — как $r_\alpha = a\,(1+e)$. Однако оба эти расстояния отсчитываются от центра Земли, а расстояния от поверхности Земли получатся, если вычесть из них радиус Земли $R$.

Поскольку звездная величина спутника изменяется максимум на $5^m$, то это означает, что освещенность, создаваемая им, меняется в 100 раз. Известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до объекта, следовательно, минимальная и максимальная высоты спутника над поверхностью Земли отличаются в 10 раз. Таким образом, можно записать уравнение:

$$10 \cdot (a\,(1-e) - R) = a\,(1+e) - R.$$

Так как $a = 6.6 \cdot R$, получаем

$$66 \cdot (1-e) - 10 = 6.6 \cdot (1+e) - 1,$$

и, решая это уравнение, находим $e \approx 0.7$. Отсюда минимальная высота спутника над поверхностью Земли $h = a\,(1-e) - R = (6.6 \cdot 0.3 - 1) \cdot R \approx R$, т.е. приблизительно равна радиусу Земли (около 6 тыс. км).