XXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

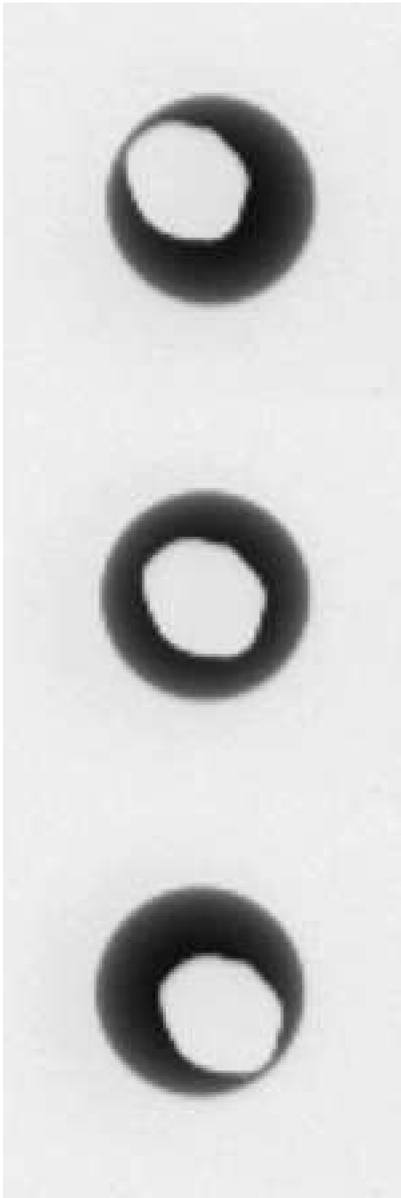
практический тур, решения

2014

16 февраля

10 класс

На изображениях — три последовательных снимка прохождения одного из спутников Марса по диску Солнца, снятых с поверхности Марса. Между моментами съемки двух крайних снимков прошло 6 секунд. Определите радиус орбиты спутника (считая ее круговой) и размеры спутника. Оцените точность полученных результатов. Можно считать, что диаметр Марса в два раза меньше диаметра Земли.



Решение:

Из рисунка можно оценить угловую скорость перемещения спутника по небу. Так как радиус орбиты Марса в 1.5 раза больше, чем у Земли, то угловой диаметр Солнца на Марсе в 1.5 раза меньше, чем на Земле, т.е. равен $20'$. Произведя необходимые измерения, можно получить, что спутник на марсианском небе в момент прохождения двигался с угловой скоростью около $80''$/сек.

Если считать, что это и есть скорость движения спутника по орбите вокруг Марса, получается, что спутник движется с угловой скоростью 80°/час, т.е. совершает полный оборот за 4 часа. Сразу становится ясно, что спутник очень быстрый, следовательно, очень близкий, и тем самым нельзя пренебрегать радиусом Марса по сравнению с радиусом орбиты спутника. Таким образом полученная угловая скорость — это скорость при наблюдении с поверхности Марса, а чтобы перейти к истинной угловой скорости обращения спутника, нужно «пересесть» в центр Марса.

Обозначим $R_{♂}$ — радиус Марса, $M_{♂}$ — массу Марса, a — радиус орбиты спутника, l — высоту спутника в момент прохождения над поверхностью Марса, ω_0 — истинную угловую обращения спутника, ω — видимую с поверхности угловую скорость.

Для простоты предположим, что спутник наблюдается в зените. Тогда $l = a - R_{♂}$. Рассмотрим тот (достаточно малый) отрезок пути, на который спутник перемещается по своей орбите за 1 секунду. с поверхности Марса этот отрезок будет виден под углом ω, из центра — ω_0. Тогда можно записать, что $\omega \cdot l = \omega_0 \cdot a = \omega_0(l + R_{♂})$. С другой стороны, известно (из соотношений для круговой орбиты или из III обобщенного закона Кеплера), что для круговой орбиты

$$\omega_0^2 = \frac{GM_{♂}}{a^3} = \frac{GM_{♂}}{(l + R_{♂})^3}.$$

Следовательно

$$\omega^2 \cdot l^2 = (l + R_{♂})^2 \frac{GM_{♂}}{(l + R_{♂})^3}),$$

отсюда

$$l^2(l + R_{♂}) = \frac{GM_{♂}}{\omega^2}.$$

$$M_{♂} = \bar{\rho}_{♂} \frac{4\pi}{3} R_{♂}^3,$$

где $\bar{\rho}_{♂}$ — средняя плотность Марса (которую можно взять равной земной 5.5 г/см^3, или вспомнить, что она у Марса чуть меньше и равна примерно 4 г/см^3), следовательно

$$l^3 + l^2 R_{♂} = \frac{G\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}_{♂} R_{♂}^3}{\omega^2},$$

$$\left(\frac{l}{R_{♂}}\right)^3 + \left(\frac{l}{R_{♂}}\right)^2 = \frac{G\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}_{♂}}{\omega^2}.$$

Обозначая $\lambda = \frac{l}{R_{♂}}$ и подставив числа (не забыв перевести ω в герцы), получаем

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 7 = 0.$$

Приближенное решение этого уравнения легко находится подбором: $\lambda = 1.7$, откуда $l = 1.7R_{♂}$, следовательно $a = 2.7R_{♂}$. Принимая радиус Марса за половину земного, т.е. примерно $3.2 \cdot 10^3$ км, получаем, что радиус орбиты спутника равен примерно $8.6 \cdot 10^3$ км.

Измерения показывают, что в момент прохождения по диску Солнца, спутник имел угловые размеры приблизительно $11' \times 13'$, т.е. в среднем $12'$. Таким образом, его средний линейный диаметр равен

$$d = \frac{12' \cdot 60 \cdot 1.5R_{♂}}{2 \cdot 10^5} \approx 5 \cdot 10^{-3} R_{♂} \approx 17 \text{ км}.$$

Если считать, что прохождение наблюдается у горизонта, то в таком случае $l^2 = a^2 - R_♂^2$ и соответствующее уравнение для величины $\alpha = \frac{a}{R_♂}$:

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 7 = 0.$$

имеет решение $\alpha \approx 2.3$, следовательно, радиус орбиты спутника $a \approx 2.3R_♂ \approx 7.4 \cdot 10^3$, а его размер $d \approx 14$ км.

Оценка точности полученных результатов получается достаточно просто. Характерные измеряемые расстояния на фотографиях составляют около 20 мм, точность, с которой это можно сделать, около 1 мм. Следовательно, измерения проводятся с относительной погрешностью 5%. Однако неопределенность положения спутника над горизонтом и неточность оценки массы и радиуса Марса оказываются заметно больше и, следовательно, в качестве оптимистичной оценки погрешности можно принять разность между полученными нами результатами. В итоге можно считать, что диаметр спутника составляет 17 ± 3 км, а радиус его орбиты — $(8\pm1)\cdot10^3$ км. Более реальная оценка может быть получена, если учесть также неопределенность исходных данных: информация о том, что между двумя крайними снимками прошло 6 секунд, вообще говоря, означает, что время могло меняться по крайней мере в пределах от 5.5 до 6.5 секунд, что также ухудшает итоговую точность. Выполнив вычисления для двух крайних случаев (минимальное время для спутника у горизонта и максимальное — для спутника в зените), мы получим, что величины погрешностей в обоих случаях требуется примерно удвоить.

Наконец, можно отметить, что использованные в задаче данные вполне реальны. Снимки сделаны марсоходом “Curiosity” 17 августа прошлого года, и изображен на них совершенно реальный спутник Марса — Фобос, парамеры которого согласуются с полученными нами результатами, если считать, что спутник наблюдался в окрестности зенита (что и происходило в действительности).