XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада
теоретический тур, решения

2013
16 февраля

9 класс

1. При каких значениях угла наклона орбиты Венеры к эклиптике мы могли бы любоваться прохождением Венеры по диску Солнца каждое нижнее соединение?

Решение:

Для того, чтобы каждое нижнее соединение Венера проходила по диску Солнца, нужно, чтобы наклон ее орбиты был таков, что на максимальном расстоянии от узла орбиты (точки пересечения орбиты с эклиптикой), она хотя бы касалась края Солнца для земного наблюдателя, т.е. находилась на прямой, соединяющей глаз наблюдателя и край Солнца.

Нарисуем орбиты Земли и Венеры в этом случае в проекции на плоскость, перпендикулярную плоскости эклиптики (рис. № 1).

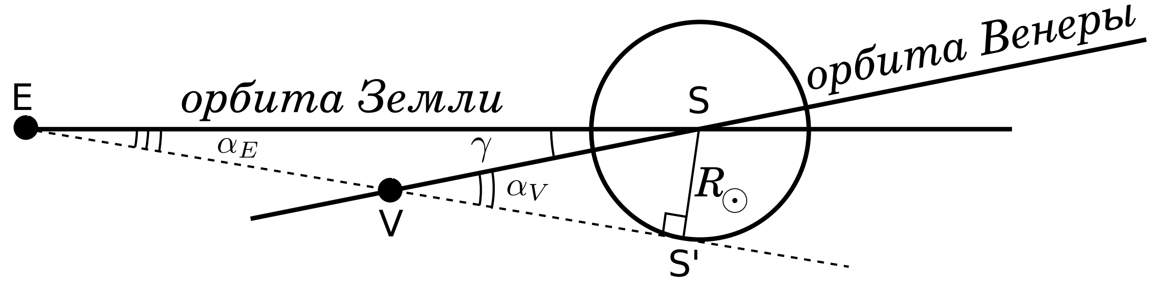

Рис. №1

Требуется найти угол между плоскостями орбиты γ. В треугольнике EVS угол α_E — угловой радиус Солнца, видимый с Земли, угол при вершине V равен $180° - \alpha_V$, где α_V — угловой радиус Солнца, видимый с Венеры. Следовательно, $\gamma = \alpha_V - \alpha_E$.

Из прямоугольных треугольников ESS' и VSS' имеем:

$$R_\odot = SS' = VS \cdot \sin\alpha_V = ES \cdot \sin\alpha_E \implies \frac{\sin\alpha_V}{\sin\alpha_E} = \frac{ES}{VS}$$

Углы α_E и α_V малы, поэтому их синусы приближенно равны самим углам (выраженным в радианах, но, т.к. нам нужно их отношение, то не важно, в каких единицах их выражать), так что:

$$\alpha_V = \alpha_E \frac{ES}{VS}.$$

Известно, что $\alpha_E = 15'$, а $ES = 1$ а.е. и $VS = 0.7$ а.е. — радиусы орбит Земли и Венеры, соответственно, поэтому

$$\alpha_V = 15' \frac{1}{0.7} \approx 21',$$

следовательно, $\gamma \approx 6'$.

Примечание. Вычисляя этот угол, мы подспудно предполагали, что наблюдатель находится в центре Земли. Переместив наблюдателя на поверхность Земли, мы, вообще-то должны учесть суточный параллакс Венеры. Оценим его. Известно, что суточный параллакс Солнца равен $8''$, Венера в момент нижнего соединения находится примерно в 30 раз ближе к Земле, чем Солнце, поэтому ее параллакс примерно в 30 раз больше и равен, таким образом, около $0'.5$, что на порядок меньше вычисленного нами угла. Тем самым параллаксом вполне можно пренебречь.

2. Студент-астроном едет на электричке. Он заметил, что угол между азимутом центра диска Луны и направлением движения поезда в начале пути составлял $20°$, а в конце пути — $120°$. Время поездки составляет 40 минут. Определите возможный диапазон значений угла поворота железной дороги на этом маршруте.

Решение:

Представим себе, что Луна не движется по небесной сфере в течение поездки, тогда ситуация в начале и конце поездки будет такой, как показано на рисунке № 2:

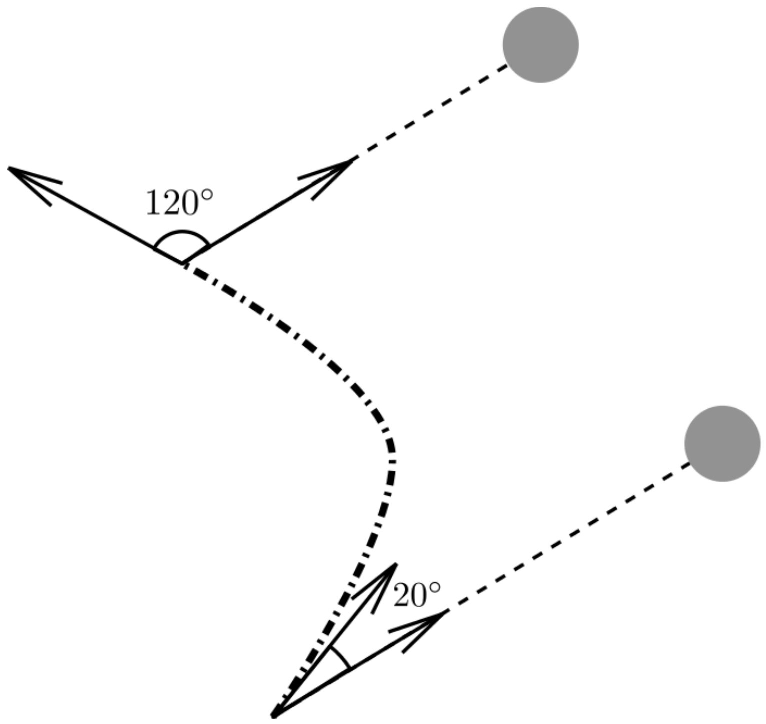

Рис. №2

направления на Луну в начале и в конце поездки параллельны друг другу, т.к. Луну можно считать «бесконечно удаленным» объектом (параллаксом Луны при таком незначительном перемещении можно и нужно пренебречь). Таким образом угол, на который делает поворот железная дорога, т.е. угол между векторами направлений движения в начале пути и в конце пути, равен $120° - 20° = 100°$.

Однако Луна в течение поездки изменяет свой азимут вследствие вращения Земли вокруг своей оси (собственным движением Луны по небесной сфере можно пренебречь, т.к. его скорость примерно в 30 раз меньше скорости вращения небесной сферы). Небесная сфера вращается с угловой скоростью $15°$/час. Следовательно, за 40 минут поездки Луна вместе с ней пройдет $15 \cdot (2/3) = 10°$ параллельно небесному экватору. Таким образом, азимут Луны за время поездки может измениться максимум на $10°$. Максимальным ($10°$) изменение азимута ΔA будет в том случае, если Луна в момент поездки была в вблизи верхней кульминации, т.к. в это время она перемещается практически горизонтально, а минимальным (почти до $0°$) — если около горизонта, т.к. в этом случае перемещение практически вертикальное (см. рис. № 3). Заметим, что движение Луны по азимуту может происходить как в ту же сторону, что и движение поезда, так и в обратную. Тем самым получаем искомый диапазон значений угла поворота дороги $100° \pm 10°$, или $[90°; 110°]$.

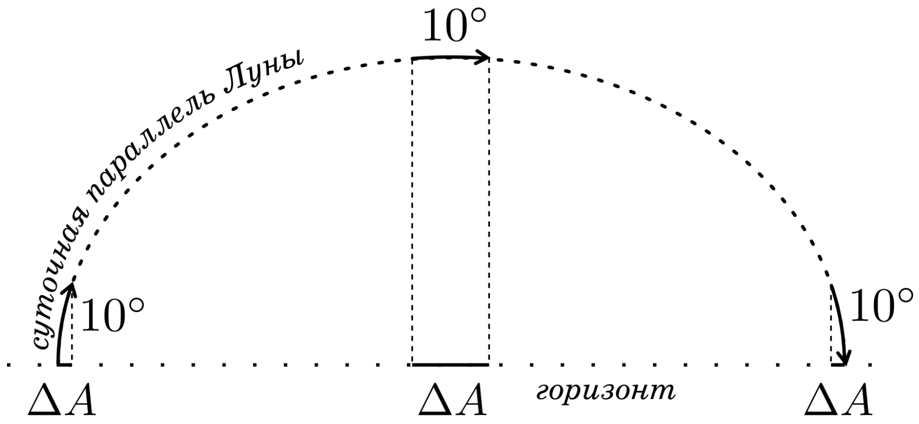

Рис. №3

3. С некоторого астероида периодически можно наблюдать полное затмение Солнца, вызванное прохождением по диску Солнца планеты Юпитер. При этом полное затмение продолжается не больше минуты. Сколько времени проходит между двумя такими последовательными затмениями? Орбиты Юпитера и астероида считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение:

Очевидно, что орбита астероида располагается дальше от Солнца, чем орбита Юпитера, и затмения случаются в те моменты, когда Юпитер для астероида находится в нижнем соединении, а астероид для Юпитера — в противостоянии. Из условия, что затмения продолжаются не больше минуты, следует, по аналогии с полными солнечными затмениями на Земле, что Юпитер и Солнце с астероида в моменты затмений видны под одним и тем же углом. Следовательно, расстояние от Юпитера до астероида в момент затмения L во столько же раз меньше радиуса орбиты астероида a, во сколько раз линейный радиус Юпитера $R_{♃}$ меньше линейного радиуса Солнца $R_{\odot}$.

$$\frac{L}{a} = \frac{R_{♃}}{R_{\odot}}.$$

В момент затмения расстояние между Юпитером и астероидом равно разности радиусов их орбит: $L = a - a_{♃}$, следовательно

$$\frac{L}{a} = \frac{a - a_{♃}}{a} = 1 - \frac{a_{♃}}{a} = \frac{R_{♃}}{R_{\odot}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_{♃}}{a} = 1 - \frac{R_{♃}}{R_{\odot}}$$

Известно, что радиус Юпитера примерно в 10 раз меньше радиуса Солнца (или известно, что масса Юпитера примерно в 10^3 раз меньше массы Солнца, а средние плотности одинаковы, отсюда получается искомое соотношение), следовательно

$$\frac{a_{♃}}{a} = 1 - \frac{R_{♃}}{R_{\odot}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Так как по условию задачи орбиты круговые и лежат в одной плоскости, затмение Солнца Юпитером для астероида наблюдается каждое нижнее соединение Юпитера (ср. зад. № 1), следовательно между последовательными затмениями проходит ровно один синодический период S.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{♃}} - \frac{1}{T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_{♃}}{S} = 1 - \frac{T_{♃}}{T}.$$

Отношение периодов, зная отношение радиусов орбит, можно получить из III закона Кеплера:

$$\frac{T_{♃}}{T} = \left(\frac{a_{♃}}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{T_{♃}}{S} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0.15.$$

$$S \approx \frac{T_{♃}}{0.15} \approx \frac{12}{0.15} = 80\,\text{лет}.$$

4. Сегодня ночью мимо Земли на минимальном расстоянии, примерно равном радиусу орбиты геостационарных спутников, пролетел астероид 2012DA14. Максимальный блеск астероида оказался близким к 7^m. Оцените размер астероида, считая, что его альбедо совпадает с альбедо Луны.

Решение:

Задача оценочная, поэтому можно пользоваться приближенными значениями и разумными соображениями относительно формы астероида.

Будем считать астероид шарообразным. Тогда, так как альбедо астероида совпадает с альбедо Луны и можно считать, что астероид и Луна находятся на одном расстоянии от Солнца, отношение количества солнечного света, отраженное полной Луной, $L_{☾}$ и количества солнечного света, отраженное «полным» астероидом, L_a равно отношению их площадей, т.е. отношению квадратов их радиусов (т.к. оба тела считаем шарообразными):

$$\frac{L_a}{L_{☾}} = \left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2.$$

Количество света, отраженного телом, которое дойдет до Земли, равномерно распределится по площади сферы с радиусом, равным расстоянию от тела до Земли. Следовательно, отношение количества отраженного от астероида солнечного света, дошедшего от астероида до Земли, E_a к количеству отраженного от Луны солнечного света, дошедшего от Луны до Земли, $E_{☾}$, равно

$$\frac{E_a}{E_{☾}} = \frac{L_a}{L_{☾}}\left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2 = \left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2\left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2$$

Разность звездных величин полной Луны (звездная величина -13^m) и астероида равна $\Delta m = 7^m - (-13^m) = 20^m$. Известно, что разнице в 5^m соответствует отношение яркостей в 100 раз. Тогда разнице в 20^m — $100^4 = 10^8$ раз. Отсюда

$$\left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2\left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2 = 10^{-8}$$

Известно, что орбита геостационарных спутников располагается примерно в 10 раз ближе к центру Земли, чем орбита Луны. (Если этот факт неизвестен, то это отношение легко получить из III закона Кеплера, связывающего радиусы орбит r и периоды обращения T:

$$\frac{r_{☾}}{r_a} = \left(\frac{T_{☾}}{T_a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Период обращения Луны составляет чуть больше 27 суток, а геостационарного спутника — 1 сутки. Отсюда получаем, что $r_{☾}\,/r_a$ чуть больше 9, что для оценочной задачи можно принять за 10.)

Тогда

$$\left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 \left(\frac{r_{☾}}{r_a}\right)^2 = \left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 \cdot 10^2 = 10^{-8}, \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{R_a}{R_{☾}}\right)^2 = 10^{-10} \quad\Longrightarrow\quad \frac{R_a}{R_{☾}} = 10^{-5} \quad\Longrightarrow\quad R_a = 10^{-5} R_{☾} \approx 10^{-5} \cdot 1.7 \cdot 10^3\,\text{км} = 17\,\text{м}.$$

5. Обитающая в некоторой галактике сверхцивилизация рассылает от своей звезды равномерно во все стороны исследовательские станции, которые движутся прямолинейно с постоянной и одинаковой у всех станций скоростью. При этом сверхцивилизация хочет, чтобы в каждый момент времени количество станций в единице объема не зависело от расстояния до звезды (в пределах сферы, до которой добрались первые запущенные станции). Как в таком случае должно зависеть количество станций, запускаемых сверхцивилизацией в единицу времени, от времени?

Решение:

Поскольку скорость движения станций постоянна, то за некоторый интервал времени Δt станции пролетают одинаковое расстояние ΔR. Поэтому все станции, запущенные в некотором малом интервале времени от t до $t{+}\Delta t$, заполняют вокруг звезды некоторый тонкий сферический слой, объем которого может быть вычислен как $4\pi R^2 \cdot \Delta R$ (где $R = V \cdot t$ — расстояние от звезды до этого слоя, V — скорость станций). Поскольку в каждый момент времени количество станций в единице объема всюду постоянно, то это означает, что количество станций, запущенных за единичный интервал времени и долетевших к данному моменту до расстояния R, должно быть пропорционально R^{-2}. А так как расстояние, до которого долетели станции, прямо пропорционально времени полета, то количество запускаемых за единичный интервал станций должно быть пропорционально t^{-2}.