

XX Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
районный тур, решения

2012
1
декабря

7–8 классы

1. Восход, Аполлон, Восток, Запад, Меркурий. Найдите лишний элемент в этом списке, обоснуйте свой ответ.

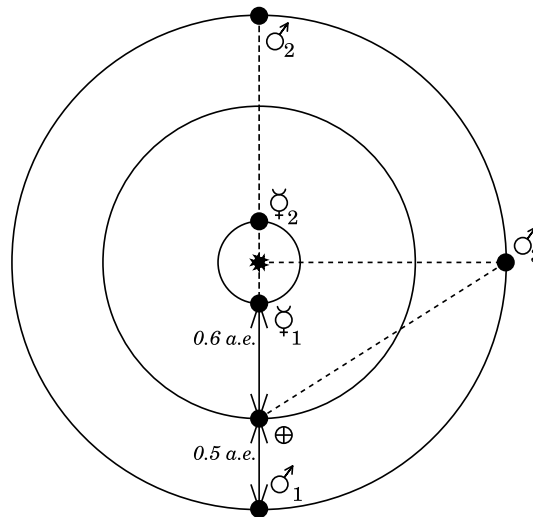
Решение:

«Восход» и «Восток» — это названия советских космических кораблей, «Меркурий» и «Аполлон» — американских. Космического корабля с названием «Запад» не существовало, поэтому Запад — лишний.

2. Минимальное расстояние от Меркурия до Земли — 0.6 астрономических единиц (а.е.), минимальное расстояние от Марса до Земли — 0.5 а.е. Какая из двух планет находится в среднем на большем расстоянии от Земли? Обоснуйте свой ответ.

Решение:

Ответ на вопрос задачи становится ясным, если вспомнить, что Марс — более далекая планета от Солнца, чем Земля (т.н. «внешняя» планета), а Меркурий — более близкая (т.н. «внутренняя» планета), и нарисовать рисунок, аккуратно изобразив на нем орбиты планет.



Из рисунка очевидно, что в среднем Марс ($\♂$) дальше от Земли (\oplus), чем Меркурий ($\♿$). В общем-то, это и есть полное решение (вместе с рисунком).

Но можно и доказать это положение. Зафиксируем Землю в одной точке и рассмотрим несколько положений двух других планет относительно нее. В наиболее близком к Земле положении Марс ($\♂_1$) ближе, чем Меркурий ($\♿_1$), как ясно из условия задачи. В самом дальнем ($\♂_2$ и $\♿_2$), очевидно, наоборот. Покажем, что Марс в положении $\♂_3$ находится от Земли дальше, чем Меркурий в положении $\♿_2$, т.е. самом дальнем для Меркурия. В прямоугольном треугольнике «Солнце – Земля – Марс $\♂_3$ » искомое расстояние \oplus – $\♂_3$ является гипотенузой. Один из его катетов — это радиус орбиты Земли, другой — радиус орбиты Марса. Теперь осталось вспомнить, что астрономическая единица (а.е.) — это как

раз радиус орбиты Земли. Тогда один из катетов этого треугольника равен 1, а другой 1.5, следовательно, квадрат гипотенузы равен $1^2 + 1.5^2 = 3.25$ (а.е.)². Можно даже не извлекать квадратный корень, а сравнить квадрат этого расстояния с квадратом расстояния $\oplus\text{--}\text{♁}_2$ (т.к. возводить в квадрат без калькулятора легче, чем извлекать квадратный корень). Это расстояние, очевидно (см. рисунок) равно 1.4 а.е., тогда его квадрат равен 1.96 (а.е.)². Таким образом расстояние $\oplus\text{--}\text{♁}_3$ больше, чем расстояние $\oplus\text{--}\text{♁}_2$, т.е. в половине возможных положений относительно Земли Марс дальше от нее, чем Меркурий в самом дальнем положении от Земли. Следовательно, и в среднем Марс дальше от Земли, чем Меркурий.

3. Школьник вышел вчера из дома и увидел Луну над трубой соседнего дома. Вчера он пришел в школу вовремя. Сегодня школьник, выйдя утром из дома, увидел Луну в том же самом месте, что и вчера. Учítывая, что школьник тратит на дорогу одно и то же время, а занятия всегда начинаются в 9 часов утра, скажите, опоздал он сегодня на занятия или пришел заранее, и оцените, насколько.

Решение:

Луна движется по орбите вокруг Земли и из-за этого смещается относительно звезд и Солнца на земном небе. Движение Луны по орбите происходит в ту же сторону (против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса), что и суточное вращение Земли. Следовательно, среди звезд Луна движется против суточного вращения неба, которое, очевидно, обратно суточному вращению Земли. Таким образом, каждые сутки точка, в которой находится Луна в некоторое определенное время, смещается к востоку относительно положения Луны в то же время в предыдущие сутки. Следовательно, чтобы достигнуть такого же положения относительно некоторого направления на поверхности Земли (например, направления «крыльцо дома школьника – труба соседнего дома»), Луне нужно еще какое-то время двигаться вместе с вращением неба. Так что школьник опоздал на занятия.

Оценим насколько. Полный оборот вокруг Земли Луна совершает за 27.5 суток. Таким образом полное смещение за земные сутки составит около $360/27.5 \approx 13^\circ$, т.е. Луна в некоторое определенное время суток окажется на 13° восточнее, чем в то же время в предыдущие сутки, т.е. отстанет от суточного вращения неба. Чтобы «скомпенсировать» это отставание, ей нужно пройти эти 13° со скоростью суточного вращения неба. Земля делает полный оборот в 360° за 24 часа, т.е. за час небо проходит 15° . Следовательно, школьник опоздал на $13/15$ часа, т.е. на 52 минуты.

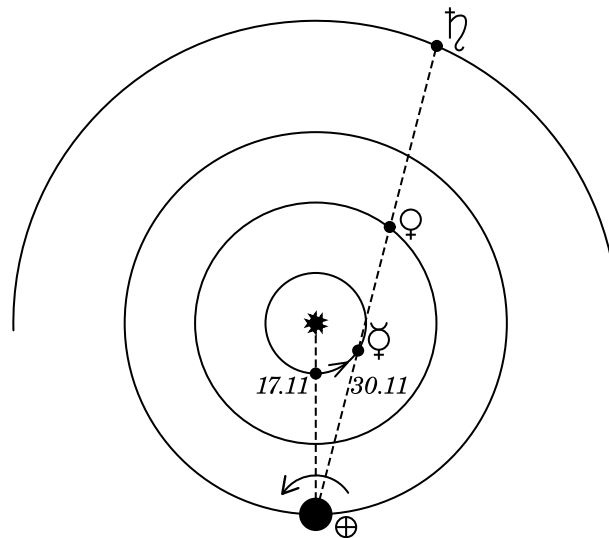
Примечание. При расчетах мы пренебрегли тем, что Луна во время компенсации отставания продолжает отставать от суточного вращения неба, т.е. смещается с чуть меньшей скоростью. Также мы пренебрегли тем, что время, по которому живет школьник (т.н. гражданское время), солнечное, т.е. гражданские сутки продолжаются чуть больше (примерно на 4 минуты), чем один оборот Земли вокруг своей оси относительно других («неподвижных») звезд. Это происходит из-за того, что Земле нужно немного «довернуться» вокруг своей оси, чтобы конкретная точка земной поверхности оказалась в таком же положении относительно Солнца, что и сутки назад, т.к. необходимо скомпенсировать движение Земли по орбите вокруг Солнца. Все эти добавки очень мало меняют ответ, поэтому ими можно пренебречь.

4. 17 ноября этого года Меркурий был в нижнем соединении (т.е. находился между Землей и Солнцем примерно на одной линии с ними). 27 ноября можно было наблюдать соединение Венеры и Сатурна, а вчера Меркурий, Венера и Сатурн составили мини-парад. В какое время суток и в какой стороне горизонта можно было наблюдать это красивое явление? Ответ обоснуйте.

Решение:

Меркурий, как и другие планеты Солнечной системы, движется вокруг Солнца против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса. Скорость его движения по орбите

больше, чем у Земли, поэтому после нижнего соединения он смещается вправо от Солнца для наблюдателя в северном полушарии Земли. Следовательно, когда Меркурий (☿), Венера (♀) и Сатурн (♄) составили парад, они располагались в пространстве примерно так, как на рисунке (на рисунке планеты, Солнце и орбита Сатурна изображены не в масштабе).



Земля вращается вокруг своей оси также против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса) и при этом с запада на восток. Поэтому при таком положении планет и Солнца в пространстве для земного наблюдателя планеты будут располагаться западнее Солнца. Следовательно вечером (на западе) они зайдут раньше, чем зайдет Солнце и видны не будут. А вот утром на востоке они взойдут немного раньше Солнца и этот парад можно будет увидеть.

5. Где-то в Галактике некая звезда сбросила оболочку массы 10^{29} кг. Оболочка расширяется таким образом, что в каждый момент времени ее толщина равна половине внешнего радиуса, причем внешние края оболочки удаляются от звезды с постоянной скоростью 10 км/с. Известно, что оболочка становится невидимой для земного наблюдателя, когда ее средняя плотность оказывается меньше 10^{-21} кг/м³. Через какое время после сброса оболочки она станет невидимой?

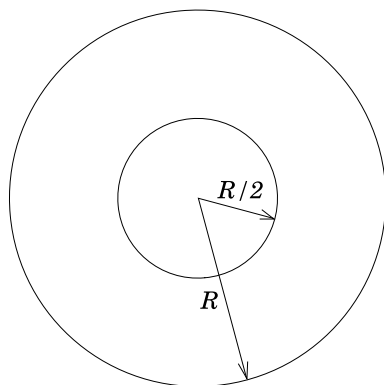
Решение:

Так как мы знаем скорость удаления внешних частей оболочки от звезды v , то мы можем найти время, за которое оболочка станет невидимой, если будем знать внешний радиус оболочки, при котором ее средняя плотность станет равна 10^{-21} кг/м³. Обозначим такой радиус R . Тогда искомое время $t = R/v$, т.к. внешний край оболочки «стартует» от звезды и должен пройти расстояние, равное получившемуся радиусу.

Масса оболочки M все время остается постоянной, поэтому можно найти такой объем V , при котором оболочка будет иметь среднюю плотность $\rho = 10^{-21}$ кг/м³:

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{10^{29}}{10^{-21}} = 10^{29-(-21)} = 10^{50} \text{ м}^3 = 10^{50-9} = 10^{41} \text{ км}^3$$

Оболочка (см. рисунок оболочки в разрезе) имеет форму шара радиусом R , из которого «вырезан» шар радиусом $R/2$, т.к. известно, что толщина оболочки всегда равна половине внешнего радиуса. Тогда очевидно, что объем оболочки будет равен разности объемов большого V_1 и малого V_2 шаров. Объем шара $V = \frac{4\pi}{3}R^3$. Тот, кто не знаком с формулой объема шара, может воспользоваться формулой для объема куба с ребром R : $V = R^3$. Видно, что при вычислении R ошибка в случае куба будет примерно в $\sqrt[3]{4} \approx 1.6$ раза.



Найдем объем оболочки:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\left(R^3 - \frac{R^3}{8}\right) = \frac{4\pi}{3}\frac{7R^3}{8} \approx 3.5R^3$$

Объем нам известен. Отсюда:

$$10^{41} = 3.5R^3 \Rightarrow 10 \cdot 10^{40} = 3.5R^3 \Rightarrow R^3 \approx 3 \cdot 10^{40} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{40}} = \sqrt[3]{30} \cdot \sqrt[3]{10^{39}} = \sqrt[3]{30} \cdot 10^{\frac{39}{3}} \approx \sqrt[3]{27} \cdot 10^{13} = 3 \cdot 10^{13} \text{ км}$$

Вычислим время

$$t = \frac{R}{v} = \frac{3 \cdot 10^{13} \text{ км}}{10 \text{ км/с}} = 3 \cdot 10^{12} \text{ с}$$

Такое большое время удобнее выразить в годах. В одном году содержится $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 3 \cdot 10^7$ с. Тогда искомое время будет равно:

$$t = \frac{3 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^7} = 10^5, \text{ или } 100 \text{ тысяч лет.}$$