XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2013

16 февраля

10 класс

1. На поверхности Луны в центре видимого с Земли диска Луны находится передающая антенна лунной станции, работающая на частоте 200 МГц. Оцените максимально возможный сдвиг частоты сигнала, принимаемого на Земле. Эксцентриситет орбиты Луны составляет 0.05.

Решение:

Сдвиг частоты сигнала является следствием эффекта Допплера, причем для оценки максимально возможного смещения требуется найти максимально возможную лучевую скорость приемника относительно передающей антенны.

Причин для появления этой скорости две. Во-первых, орбита Луны не является круговой, поэтому Луна периодически приближается к Земле и удаляется от нее. Во-вторых, Земля вращается вокруг своей оси. Заметим, что вращение Луны вокруг своей оси, хотя и существует, учитывать не надо, поскольку станция на Луне из-за синхронизации вращения Луны будет располагаться по отношению в Земле в одном и том же положении. Оценим характерные скорости, связанные с каждым из этих двух факторов.

Расстояния от Земли до Луны в перигее и апогее могут быть вычислены как $a\,(1-e)$ и $a\,(1+e)$ соответственно, где a — большая полуось орбиты Луны, а e — ее эксцентриситет. Отсюда вычисляем разность расстояний, она составляет $2ae \approx 4 \cdot 10^4$ км. Так как период обращения Луны вокруг Земли и период между двумя последовательными прохождениями Луной перигея ее орбиты примерно равны одному месяцу, то средняя скорость, с которой Луна приближается или удаляется от Земли, составляет примерно $4 \cdot 10^4$ км/15 дней, т.е. около 0.03 км/с. Очевидно, что зависимость лучевой скорости от времени имеет вид синусоиды, так что среднее значение скорости и максимальное значения отличаются не слишком сильно, не более чем в два раза (эту оценку можно выполнить и точно, отношение окажется равным $\pi/2 \approx 1.6$, поэтому в качестве оценки максимальной лучевой скорости, связанной с эллиптичностью орбиты Луны, можно взять 0.06 км/с.

Из-за вращения Земли приемник может удаляться от передающей станции или приближаться к ней с максимальной скоростью, равной линейной скорости движения точек на экваторе Земли. Последнюю легко оценить, она составляет примерно 0.5 км/с. Очевидно, что этот эффект на порядок больше предыдущего, следовательно, именно он и является определяющим.

Смещение частоты $\Delta\nu$ может быть вычислено из

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c},$$

где ν — частота источника, v — относительная лучевая скорость, c — скорость света. Подставляя числовые данные, получаем ответ — около $3 \cdot 10^2$ Гц.

2. В шаровом звездном скоплении практически отсутствуют звезды более ранних спектральных классов, чем G2, причем большинство звезд класса G2 имеет видимую звездную величину $+20^m$. Оцените возраст скопления и расстояние до него.

Решение:

Все звезды скопления образовались примерно в одно и то же время. Так как массивные звезды эволюционируют быстрее, они раньше покидают главную последовательность (ГП) на диаграмме Герцшпрунга-Рассела и становятся красными гигантами. Поэтому звезды наиболее раннего спектрального класса среди всех звезд скопления — это звезды той массы, время нахождения которых на главной последовательности примерно совпадает с возрастом скопления (так как все более массивные звезды ГП уже покинули).

Известно, что к спектральному классу G2 относится, в частности, Солнце. Его время жизни на главной последовательности составляет около 10 миллиардов лет, и, следовательно, это и есть возраст скопления.

Кроме этого, известно, что абсолютная звездная величина Солнца $M \approx +5^m$. Поскольку видимая звездная величина m таких же звезд в скоплении нам известна, расстояние до скопления определяется из выражения

$$M = m - 5\lg r + 5,$$

где r выражено в парсеках. Подставляя числа, получаем $\lg r = 4$, т.е. расстояние составляет около 10 кпк.

3. В центральной части шарообразной эллиптической галактики вокруг ее центра обращаются две звезды. Орбиты обеих звезд круговые, лежат в одной плоскости, направления вращения совпадают, радиус орбиты первой звезды составляет 100 пк, а второй — 50 пк. Найдите синодический период этих двух звезд (т.е. период между повторением одинакового взаимного расположения двух звезд и центра галактики), если известно, что в центральной части галактики все звезды расположены примерно однородно, концентрация звезд составляет около $10^4\ \mathfrak{M}_\odot/\text{пк}^3$.

Решение:

Галактика является сферически-симметричной, поэтому для каждой из звезд внешние для нее части галактики не влияют на ее движение, а внутренние можно заменить материальной точкой соответствующей массы, находящейся в центре галактики.

Пусть орбита звезды имеет радиус r. Тогда массу галактики, находящуюся внутри этого радиуса, можно вычислить как $M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, где ρ — плотность вещества внутри радиуса r. Скорость движения по круговой орбите вокруг точки такой массы составляет

$$v = \sqrt{\frac{GM_r}{r}} = \sqrt{\frac{4G\pi r^3\rho}{3r}} = \sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}}r,$$

т.е. она пропорциональна радиусу орбиты. Это означает, что угловая скорость движения звезды $\omega = v/r$ от радиуса орбиты не зависит. Следовательно, обе рассматриваемых звезды вращаются с одинаковой угловой скоростью, их взаимное положение относительно центра галактики не меняется со временем, поэтому их синодический период стремится к бесконечности.

4. Оцените температуру поверхности Седны во время прохождения ею афелия орбиты, если известно, что большая полуось орбиты Седны составляет 540 а.е., а эксцентриситет орбиты равен 0.86.

Решение:

Афелийное расстояние Седны составляет $r_\alpha = a\,(1+e) = 10^3$ а.е. Освещенность, создаваемая Солнцем на таком расстоянии, равна

$$E = \frac{L_\odot}{4\pi r_\alpha^2},$$

где $L_\odot$ — светимость Солнца. Если предположить, что Седна поглощает все падающее на нее излучение (это достаточно хорошее предположение, альбедо транснептуновых объектов существенно отличается от единицы), то за единицу времени Седна получает энергию, равную $E \cdot \pi R^2$, где R — радиус Седны.

Поскольку условия освещения меняются крайне медленно, можно считать, что такую же энергию Седна за единицу времени и отдает, следовательно, верно равенство

$$\frac{L_\odot}{4\pi r_\alpha^2} \cdot \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

где σ — постоянная Стефана-Больцмана, T — температура Седны (более правильно было бы написать, что это эффективная температура Седны, но, поскольку мы уже предположили, что Седна поглощает все падающее на нее излучение, т.е. является абсолютно черным телом, и имеется термодинамическое равновесие, то эффективная температура должна совпадать с температурой поверхности).

Для упрощения вычислений выразим светимость Солнца через его радиус $R_\odot$ и эффективную температуру $T_\odot$, тогда последнее выражение примет вид

$$\frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi r_\alpha^2} \cdot \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Упрощая его, получаем, что

$$T = \sqrt{\frac{R_\odot}{2\, r_\alpha}} T_\odot.$$

Воспользовавшись тем, что $R_\odot \approx 1/200$ а.е., а эффективная температура Солнца $T_\odot \approx 6 \cdot 10^3$ К, вычисляем ответ: около 10 К.

5. Как известно, 21 декабря 2012 года мы пережили очередной «конец света», и пора начинать готовиться к следующему. Известно, что т.н. «длинный цикл» календаря Майя составляет 1872000 суток. Найдите дату следующего «конца света» (в предположении, что используемый нами сейчас календарь за это время не изменится).

Решение:

Идея решения задачи более-менее очевидна — надо выяснить, сколько за 1872000 суток пройдет лет, месяцев и дней, однако ее практическая реализация при отсутствии вычислительной техники представляет некоторую сложность. Существуют по крайней мере два способа реализации решения.

Можно вспомнить устройство григорианского календаря и вычислить количество суток в наиболее его продолжительном 400-летнем цикле (146097), а затем разделить с остатком на это число 1872000, получив количество циклов. Далее повторить процедуру для меньших, 100-летних циклов, потом 4-летних и т.д.

С другой стороны, можно вспомнить или вычислить среднюю продолжительность года в григорианском календаре, которая составляет 365.2425 суток, после чего разделить на это число 1872000 в столбик с точностью до целых. Получится 5125 лет и остаток около 132.2 суток. 2012 год был високосным, следовательно, через 5125 лет будет первый невисокосный год 4-летнего цикла (остаток от деления 5125 на 4 равен 1). Отсюда следует, что в искомом году не будет 29 февраля, и что от 21 декабря $2012 + 5125 = 7137$ года надо отсчитать 133 дня, а не 132 (невисокосные года короче среднего, и за 2 невисокосных года накапливается примерно 1/2 суток отклонения от среднего значения). Поскольку количество дней в месяцах известно, отсчет 133 суток становится сравнительно легкой процедурой.

В итоге оба варианта дают, естественно, один и тот же ответ: 3 мая 7138 года.