

XX Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
практический тур, решения

2013
17
февраля

10 класс

Вам дано негативное изображение Луны и Юпитера с галилеевыми спутниками, снятое на Земле. Определите расстояние от Земли до Юпитера в момент съемки и оцените погрешность этого определения. Выясните, в каком порядке (слева направо) могут располагаться на этой фотографии галилеевы спутники, если известно, что радиус орбиты Ио составляет $4 \cdot 10^5$ км, Европы — $7 \cdot 10^5$ км, Ганимеда — $10 \cdot 10^5$ км, Каллисто — $19 \cdot 10^5$ км.



Решение:

Вариант решения № 1.

Нарисуем расположение Юпитера, Луны, Земли и Солнца в момент съемки. По фотографии видно, что угловое расстояние от Юпитера до центра видимого диска Луны меньше диаметра видимого диска Луны, т.е. $0^\circ.5$, поэтому можно считать, что Луна и Юпитер находятся для фотографа в одном и том же направлении. Таким образом, расположение тел примерно соответствует рис. № 1 (не в масштабе).

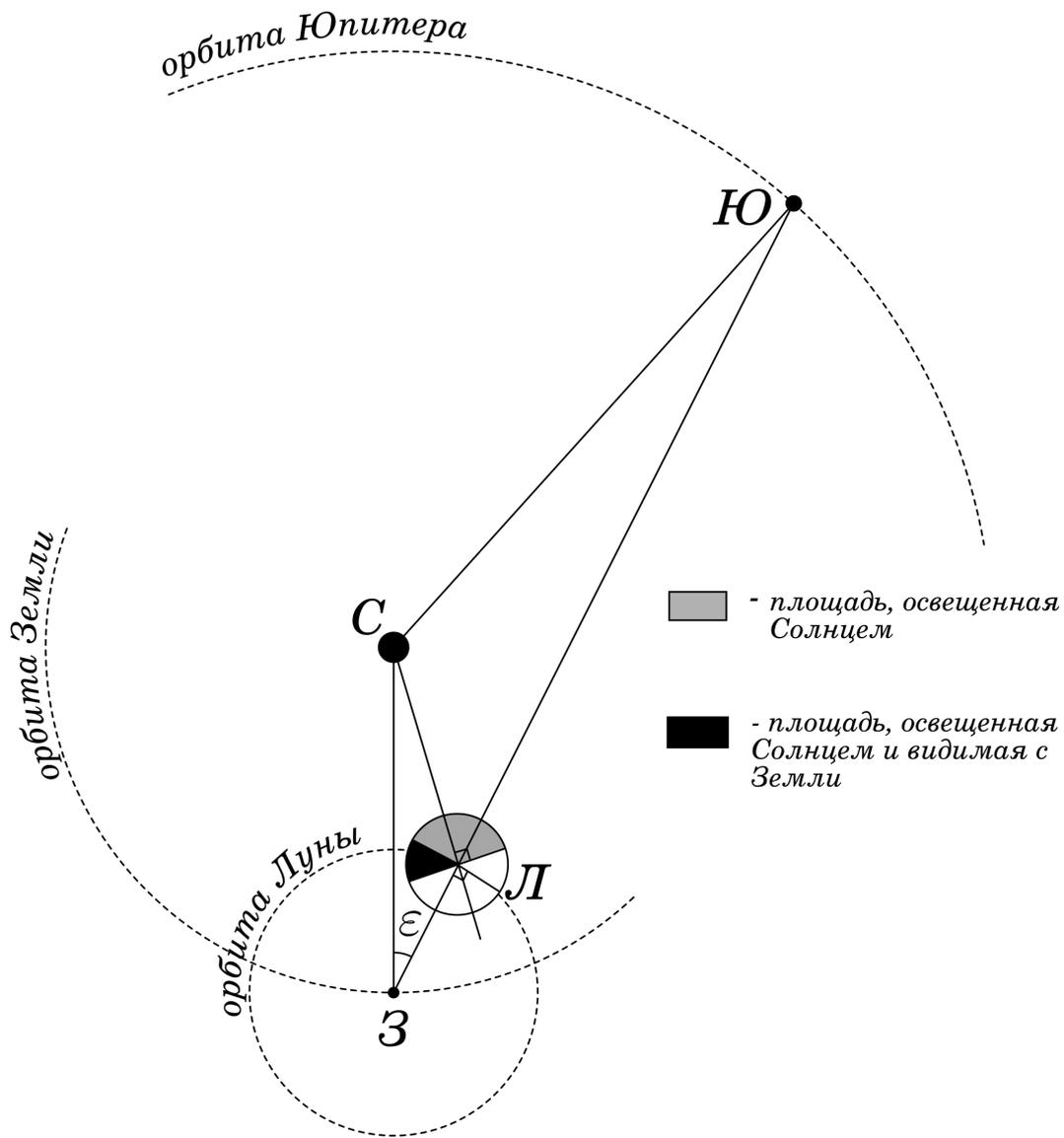


Рис. №1

Для того, чтобы определить расстояние от Юпитера до Земли в момент съемки, нужно решить треугольник CZY , где сторона $CZ = 1$ а.е. — радиус орбиты Земли, $CY = 5$ а.е. — радиус орбиты Юпитера, а ZY — искомое расстояние. Сторону ZY в этом треугольнике можно найти из теоремы косинусов: $CY^2 = CZ^2 + ZY^2 - 2CZ \cdot ZY \cdot \cos \varepsilon$, если знать угол ε .

Чтобы найти угол ε , воспользуемся измерением фазы Луны, изображенной на фотографии. Рассмотрим треугольник ZCL . В нем сторона ZC примерно в 400 раз больше стороны ZL , так что можно считать, что угол при C близок к нулю, а угол при L равен $180^\circ - \varepsilon$. Таким образом, угол, стягивающий сектор, закрасенный черным на рисунке, а, следовательно, и двугранный угол, «вырезающий» часть площади, освещенной Солнцем и видимой с Земли, равен ε (рис. №2а).

При проектировании изображения Луны на небесную сферу получится «серп», изображенный на рис. №2б, наибольшая ширина которого $O'F$ определяется как $OO' - OF$. $OO' = OF' = R_{\zeta}$, где R_{ζ} — видимый радиус Луны (см. рис. №2в).

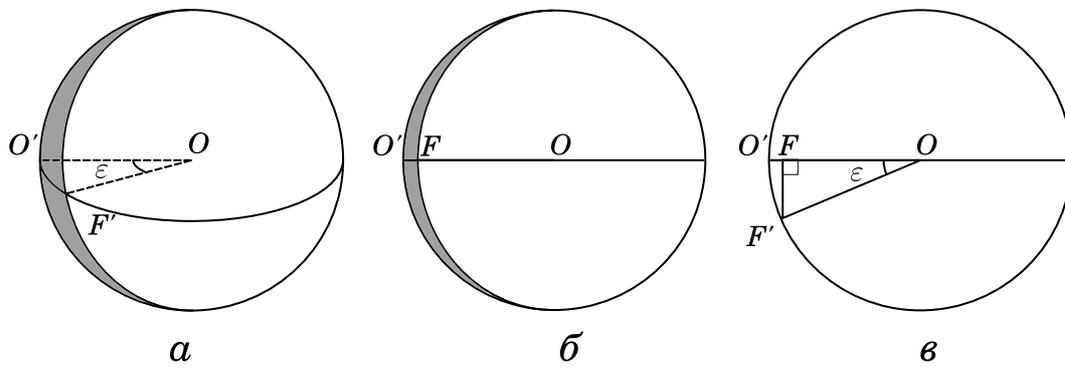


Рис. №2

$$O'F = OO' - OF = OO' - OF' \cos \varepsilon = R_{\zeta} (1 - \cos \varepsilon).$$

Измерения фотографии дают: $R_{\zeta} \approx 5.5$ см, $O'F \approx 1.6$ см, следовательно,

$$1 - \cos \varepsilon = \frac{O'F}{R_{\zeta}} \approx \frac{1.6}{5.5} \approx 0.3 \implies \cos \varepsilon \approx 0.7 \implies \varepsilon \approx 45^\circ.$$

Подставляя в теорему косинусов известные величины, получаем квадратное уравнение для расстояния $ЗЮ$:

$$ЗЮ^2 - 1.4 \cdot ЗЮ - 24 = 0,$$

положительный корень которого, $ЗЮ \approx 5.7$ а.е., и является искомым расстоянием.

Оценим погрешность определения расстояния. Абсолютная погрешность измерений на фотографии составляет примерно 2 мм, она связана, в основном, с неопределенностью нахождения диаметра видимого диска Луны и неровностью терминатора (линии, отделяющей освещенную часть диска от неосвещенной). Это дает абсолютную погрешность определения¹ $\cos \varepsilon$ примерно 0.05, которая при вычислениях с точностью до 2-х значащих цифр не сказывается на результате. Таким образом, погрешность определения расстояния создается в основном погрешностью вычислений и составляет 0.1 а.е.

Теперь определим возможный порядок расположения спутников. Вычислим масштаб изображения Юпитера со спутниками. Диаметр видимого диска Луны на снимке составляет примерно 11 см, следовательно, диаметр видимого диска Солнца, находящегося от Земли на расстоянии 1 а.е., на этом снимке также равнялся бы 11 см. Если бы мы отнесли Солнце на расстояние, на котором в момент съемки находился Юпитер (5.7 а.е.), то на этом снимке его диаметр оказался бы равным $11/5.7 \approx 2$ см. Таким образом, для системы Юпитера 1 см на снимке соответствует примерно линейному радиусу Солнца, равному $7 \cdot 10^5$ км. Измеряя по снимку расстояния между Юпитером и спутниками, получаем:

1. крайний левый спутник находится от Юпитера на расстоянии, равном диаметру Солнца, т.е. $14 \cdot 10^5$ км, и ничем, кроме Каллисто, быть не может;
2. второй слева спутник отдален от Юпитера чуть больше, чем на радиус Солнца, поэтому может быть либо Ганимедом, либо Каллисто, но последний исключается, т.к. его положение уже определено;

¹Оценить это можно следующим образом: абсолютная погрешность определения $\cos \varepsilon$ равна абсолютной погрешности величины $1 - \cos \varepsilon$, которая, в свою очередь, равна абсолютной погрешности отношения $\frac{O'F}{R_{\zeta}}$. Последнюю можно оценить, разделив наибольшее возможное, с учетом погрешности измерений, значение $O'F$ на наименьшее значение R_{ζ} , получая наибольшее возможное значение отношения, и наоборот. Найдя разности между этими величинами и средним значением $\frac{O'F}{R_{\zeta}}$, получаем погрешность определения этого отношения, а значит и $\cos \varepsilon$.

3. крайний справа спутник отстоит от Юпитера чуть меньше, чем на радиус Солнца, так что, в принципе, может быть любым, кроме Ио, но, т.к. положения Ганимеда и Каллисто определены, остается Европа;
4. и, наконец, самый ближайший к Юпитеру спутник методом исключения определяется как Ио, хотя, в принципе, в таком положении может находиться любой из 4-х спутников.

Таким образом, получаем следующий порядок видимого расположения тел (слева направо): Каллисто, Ганимед, Юпитер, Ио, Европа.

Здесь нужно сделать оговорку. Второй слева спутник находится на снимке примерно в 1.1 см от центра Юпитера. Погрешность измерения этого расстояния составляет около 1 мм, поскольку положение центра Юпитера плохо определяется из-за размытости его изображения. А так как, опять же из-за погрешности измерений, 1 см соответствует радиусу Солнца только примерно, а, скорее всего, чуть меньше его, то Европа в своем самом далеком от Юпитера положении с некоторой натяжкой все же может соответствовать второму слева спутнику. Поэтому, хотя вышеуказанный порядок более вероятен (и на самом деле верен), возможен также порядок с заменой Ганимеда Европой и наоборот.

Вариант № 2.

Можно решить задачу с помощью геометрических построений (см. рис. № 3).

Считаем, что все тела в момент съемки находятся в плоскости эклиптики, что не очень далеко от истины. Рисуем полуокружность произвольного диаметра. Она будет изображать проекцию половины Луны, обращенной к Земле, на плоскость эклиптики. Линия, проведенная из центра полуокружности перпендикулярно ее диаметру и пересекающая полуокружность, изображает направление на Землю в данный момент. Измеряем на снимке наибольшую ширину проекции серпа и диаметр видимого диска Луны, находим их отношение. На своем рисунке в той же пропорции откладываем наибольшую ширину проекции серпа φ от левого (хотя это не принципиально) края полуокружности вдоль ее диаметра и ставим в нужном месте точку. Из этой точки восстанавливаем перпендикуляр к диаметру и находим точку его пересечения с полуокружностью. Получившаяся точка является проекцией терминатора Луны на плоскость рисунка. Через эту точку и центр полуокружности проводим прямую, которая является проекцией на плоскость рисунка плоскости, содержащей терминатор. Восстанавливая перпендикуляр к этой прямой из центра полуокружности, получаем направление на Солнце из центра Луны в момент съемки. Направление на Юпитер с Земли практически совпадает с направлением на Луну, поэтому на рисунке направлением на Юпитер будет продолжение линии, изображающей направление на Землю.

Таким образом мы получили угол между направлениями на Юпитер и на Солнце из центра Луны в момент съемки. Теперь, имея в виду, что расстояние между Луной и Землей в 400 раз меньше, чем расстояние от Земли до Солнца, мысленно сжимаем систему Земля–Луна до размеров точки и помещаем ее в центр полуокружности на рисунке. Теперь у нас есть направления на Солнце и Юпитер с Земли в момент съемки.

Откладываем от центра полуокружности вдоль направления на Солнце произвольный отрезок, длину которого принимаем за единицу (1 а.е.), и ставим в этом месте точку, изображающую положение Солнца в данный момент. Далее из этой точки (от Солнца) проводим окружность радиусом 5 единиц и находим точку ее пересечения с направлением на Юпитер. Это будет положение Юпитера в данный момент. Теперь осталось только измерить на рисунке в выбранных единицах расстояние между центром полуокружности и точкой, изображающей Юпитер, обозначенное L . Получившееся расстояние и будет расстоянием до Юпитера в момент съемки в астрономических единицах.

Оценим погрешность. Абсолютная погрешность измерений на снимке (около 2 мм) приводит к относительной погрешности измерения отношения ширины серпа к диаметру $0.1 \div 0.2$ (см. сноску на пред. странице). Очевидно, примерно с такой же относительной погрешностью будут выполняться и построения на рисунке (это можно проверить непосредственно построени-

ем). Таким образом, погрешность определения расстояния будет равна $0.1 \div 0.2$ от выбранной единицы, следовательно, 0.2 а.е.

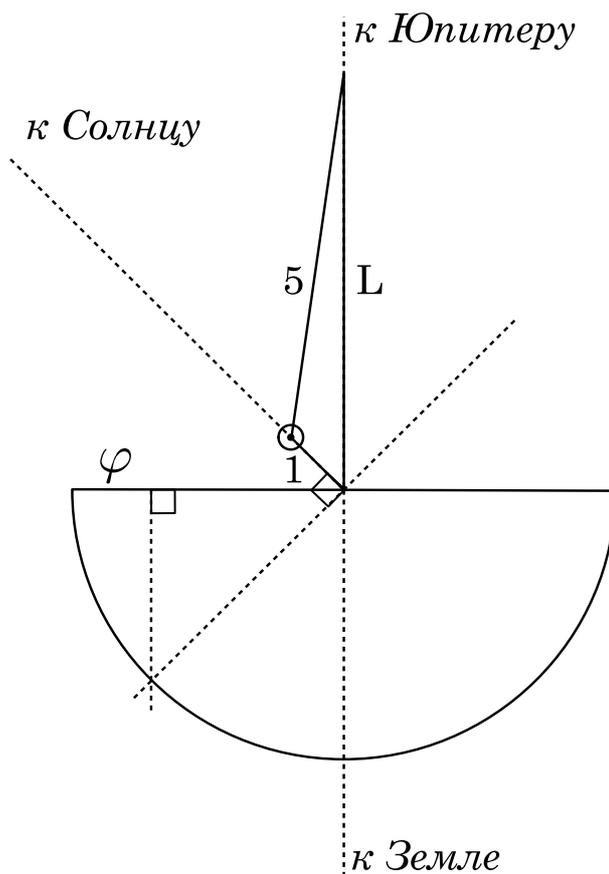


Рис. №2

Вариант № 3.

По фазе Луны на снимке очевидно, что Юпитер находится где-то между квадратурой (в таком случае Луна была бы в фазе четверти) и соединением (тогда Луна была бы в новолунии), причем, пожалуй, ближе к соединению. Таким образом, расстояние от Земли до Юпитера точно больше 5 а.е. (расстояния в квадратуре, которое легко вычислить по т-ме Пифагора) и точно меньше 6 а.е. (расстояния в соединении). Таким образом в качестве первого приближения можно взять среднее из них 5.5 а.е. Теперь так же, как в первом решении, вычислим масштаб изображения Юпитера со спутниками. Сразу становится очевидно, что крайний левый спутник не может быть ничем, кроме Каллисто, второй слева и крайний справа спутники оба могут соответствовать как Европе, так и Ганимеду, а ближайший к Юпитеру спутник, несомненно, является Ио. Определив тем самым возможный порядок спутников и приняв, что все спутники находятся в момент съемки на максимальном удалении от Юпитера, можно рассчитать по угловым расстояниям, измеренным по снимку, и известным максимальным линейным расстояниям каждого спутника от Юпитера, 6 значений расстояния от Земли до системы Юпитера в момент съемки (т.к. Европу и Ганимед придется рассмотреть дважды). Очевидно, что получившиеся таким образом значения — это нижние оценки искомого расстояния, так как спутники могут находиться не на максимальном угловом удалении от Юпитера. Поэтому из всех вариантов нужно взять максимально большое значение, которое и будет достаточно точной нижней оценкой расстояния. Обязательно необходимо указать, что это нижняя оценка, т.е. расстояние не меньше данной величины. В этом случае формально определить погрешность затруднительно, но, по-видимому, она не должна превышать 0.5 а.е.

Вариант № 4.

В принципе, можно было бы измерить на снимке отношение видимых размеров Юпитера и Луны и, вспомнив, что радиус Юпитера в 10 раз меньше радиуса Солнца, а видимые размеры

Луны равны видимым размерам Солнца, вычислить расстояние из этих соображений. Но в данном случае погрешность получается слишком большой: видимый размер Юпитера на снимке превышает его реальный угловой размер, т.к. изображение Юпитера передержано.