XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

очный отборочный тур, решения

2011

12 ноября

11 класс

1. 25 ноября произойдет частное солнечное затмение, полоса видимости которого включает всю Антарктиду. Максимальная фаза затмения состоится в 6 часов 20 минут по Всемирному времени. Будет ли видно затмение (при условии, конечно, хорошей погоды) на чилийской антарктической станции «Лейтенант Артуро Пароди» , имеющей географические координаты $80°19'$ ю.ш., $81°18'$ з.д.? Ответ обоснуйте.

Решение:

Рассчитаем местное время, на которое придется максимальная фаза затмения. Как известно, местное время на различных меридианах различается на величину, равную разности долгот этих меридианов. Переведем долготу в часы и минуты ($1^h = 15°$): $81°18' = 5^h25^m$. Т.к. долгота западная, то в момент максимальной фазы затмения местное время на станции будет примерно равно 1^h (ночи). Можно было бы предположить, что затмение видно не будет. Но станция находится за полярным кругом и, возможно, в это время на станции полярный день. Оценим, будет ли Солнце над горизонтом в полночь по местному времени станции. Высота светила в нижней кульминации $h_{min} = |\delta| + |\varphi| - 90°$, где δ — склонение светила, а φ — широта места наблюдения. Оценим склонение Солнца. Будем считать, что склонение изменяется равномерно от $0°$ 21 сентября до $-23°.5$ 22 декабря, т.е. уменьшается примерно на $0°.26$ в сутки. Тогда можно считать, что 25 ноября склонение Солнца составит примерно $-16°$. Следовательно высота Солнца над горизонтом в нижней кульминации, т.е. в полночь, на станции будет равна $h_{min} = 16° + 80°19' - 90° = 6°19'$. Таким образом Солнце даже в полночь будет над горизонтом, а следовательно в час ночи **затмение можно будет наблюдать**.

Примечание. На самом деле склонение Солнца изменяется по синусоиде, поэтому оно быстро уменьшается в окрестности равноденствия, а в течение последнего месяца перед солнцестоянием почти не изменяется, реальное склонение Солнца 25 ноября равно $-20°.5$, следовательно, минимальная высота его над горизонтом оказывается еще больше.

2. В течение этого ноября видимый диаметр Юпитера уменьшится от $50''$ до $47''$. Чему будет равна видимая звездная величина Юпитера в конце ноября, если в начале месяца она равнялась $-2^m.9$?

Решение:

Угловой размер Юпитера α изменится из-за изменения расстояния r от Юпитера до Земли как $\alpha \propto 1/r$. Освещенность E, создаваемая Юпитером на Земле, зависит от расстояния до него как

$$E \propto \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad E \propto \alpha^2.$$

Отсюда, применяя формулу Погсона, получаем разность звездных величин

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{E_1}{E_2} = -2.5 \lg \left(\frac{50}{47}\right)^2 = -5 \lg \frac{50}{47} =$$

$$= -5\frac{\ln(1+3/47)}{\ln 10} \approx -5\frac{3/47}{2.3} \approx -0.15$$

и получаем, что в конце ноября звездная величина Юпитера будет равна $\mathbf{-2^m.75}$.

3. Оцените среднюю орбитальную скорость открытой 200 лет назад знаменитой «Большой кометы 1811 года», если период ее обращения вокруг Солнца $P \approx 3 \cdot 10^3$ лет, а эксцентриситет ее орбиты $e \approx 1$.

Решение:

Поскольку эксцентриситет орбиты близок к единице, очевидно, что кометная орбита представляет собой очень сильно вытянутый эллипс, который без особой потери точности можно считать отрезком прямой. Тогда полная длина l такой орбиты связана с большой полуосью a простым соотношением $l = 4a$. Большую полуось a можно найти из III закона Кеплера:

$$a = \sqrt[3]{P^2} \approx \sqrt[3]{(3 \cdot 10^3)^2} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ а.е.}$$

Тогда $l \approx 4 \cdot 2 \cdot 10^2 = 8 \cdot 10^2$ а.е. и, следовательно средняя орбитальная скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{l}{P} \approx \frac{8 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^3} \approx \frac{1}{4} \text{ а.е./год} \approx \mathbf{1\ км/с.}$$

4. Оцените частотный диапазон, в котором может работать радиотелескоп-рефлектор с антенной диаметром 10 м, сделанной из металлической сетки с ячейками размером 1 см.

Решение:

Известно, что для того, чтобы работали законы геометрической оптики, необходимо, чтобы рабочая длина волны принимаемого излучения была много меньше размеров телескопа, а размеры неоднородностей отражающей поверхности телескопа были много меньше длины волны. «Много меньше» — это примерно раз в 10. Так как размеры ячеек сетки 1 см, то минимальную рабочую длину волны можно оценить в 10 см. Максимальную рабочую длину волны можно оценить в 1 м, т.к. диаметр антенны 10 м. Переведем длины волн λ в частоты ν.

$$\nu[\text{Гц}] = \frac{c[\text{м/с}]}{\lambda[\text{м}]}.$$

Тогда минимальная частота

$$\nu_{\mathbf{min}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1} = \mathbf{3 \cdot 10^8\ Гц},$$

а максимальная

$$\nu_{\mathbf{max}} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-1}} = \mathbf{3 \cdot 10^9\ Гц}.$$

5. Три звезды с массами, равными массе Солнца, находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной 1 а.е. Какими должны быть скорости звезд, чтобы их взаимное расположение не изменялось со временем?

Решение:

Так как звезды расположены в вершинах равностороннего треугольника, то можно считать, что результирующая гравитационная сила, действующая на каждую звезду направлена в сторону барицентра системы, которая в данном случае совпадает и с геометрическим центром системы (что очевидно). Тогда можно определить расстояние от каждой из звезд до барицентра — оно составляет $a = \frac{r}{\sqrt{3}}$, где $r = 1$ а.е. — сторона равностороннего треугольника.

Силы, с которыми первая звезда притягивается ко второй и к третьей равны между собой по модулю и равны $F_0 = G\frac{m^2}{r^2}$. Однако направлены они в разные стороны под углом в $60°$. После определения равнодействующей этих двух сил получается, что она направлена к барицентру, а по модулю составляет $F = 2 \cdot F_0 \cdot \cos 30° = F_0 \cdot \sqrt{3}$, т.е. можно полагать, что в барицентре расположен виртуальный притягивающий центр с массой, равной $M_* = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot m$, расположенный на расстоянии a от каждой звезды.

Условие неизменности взаимного расположения звезд может быть выполнено только в случае движения звезд по круговым орбитам. Такое движение возможно только с круговой скоростью, т.е. с первой космической скоростью, равной $V_I = \sqrt{\frac{GM_*}{a}}$. Тогда, подставляя найденные выше величины, получаем:

$$V = \sqrt{\frac{3Gm}{r}} = \sqrt{\frac{\cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1.5 \cdot 10^{11}}} \approx 3 \cdot 10^4,$$

т.е. примерно **30 км/с**.

Можно отметить, что вычисления в задаче можно существенно упростить, если использовать систему единиц, в которой единицей массы является масса Солнца, единицей времени — год, единицей расстояния — астрономическая единица. Тогда $G = 4\pi^2$ в соответствующих единицах, а скорость звезд оказывается равной 2π а.е./год, т.е. совпадает с орбитальной скоростью Земли (что же получено выше).