Решения задач

Районный тур — Санкт-Петербург

9 класс

11. Попробуем сформулировать критерии отбора такой планеты. Во-первых, у нее должно быть две соседних планеты. Следовательно, Меркурий и Нептун исключаются.

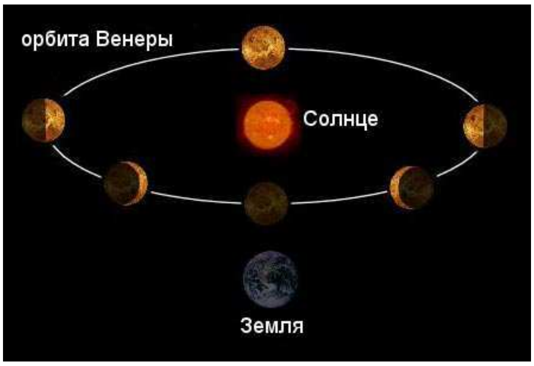
Во-вторых, у этих двух соседних планет должны быть спутники. Следовательно, отпадают Венера (у Меркурия спутников нет) и Земля (у Венеры тоже нет).

Далее. Спутник будет тем заметнее, чем он больше по размеру. В качестве кандидатов уместно рассмотреть 6-7 самых крупных спутников Солнечной системы (это Луна, галилеевы спутники Юпитера, спутник Сатурна Титан и Нептуна — Тритон). Спутники Марса с Юпитера не увидеть (поскольку их и с Земли, которая ближе, не заметить), у Урана таких крупных спутников нет, так что Юпитер и Сатурн можно также исключить. В итоге остается только два варианта — Марс и Уран.

Чем ближе планета к Солнцу, тем, при прочих равных условиях, будут ярче ее спутники. Кроме этого, радиусы орбит планет с увеличением порядкового номера планеты очень быстро растут, поэтому и минимальные расстояния между соседними планетами тоже увеличиваются с удалением от Солнца. Оба этих обстоятельства (а также тот факт, что Тритон — самый маленький из крупных спутников, и увидеть его с Урана было бы сложно и по этой причине тоже) приводят к однозначному выводу — искомой планетой является Марс, с которого невооруженным глазом видна Луна и галилеевы спутники Юпитера.

Это действительно так — известен факт, что галилеевы спутники Юпитера можно было бы видеть невооруженным глазом даже с Земли (они имеют примерно $+5^m$ звездную величину), если бы не находящийся рядом яркий Юпитер.

12. Венера светит отраженным солнечным светом, причем находится ближе к Солнцу, чем Земля, поэтому у Венеры наблюдается полная смена фаз.



Очевидно, что фаза зависит от относительного положения Венеры, Солнца и Земли (т.н. конфигурации), которое изменяется вследствие движения планет вокруг Солнца. Очевидно, что период смены фаз совпадает с периодом смены конфигураций Венеры. Этот период называется синодическим (видимым) S и связан с сидерическими («настоящими») периодами обращения вокруг Солнца Венеры $T_{♀}$ и Земли $T_{\oplus}$ так называемым «уравнением синодического движения»:

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T_{♀}} - \frac{1}{T_{\oplus}}\right|.$$

Преобразовывая и подставляя числа, получаем:

$$S = \frac{365 \cdot 225}{365 - 225} \approx 587\,\text{дней} \approx 1.6\,\text{года}.$$

Отметим, что не было необходимо в течение этого периода непрерывно наблюдать Венеру, достаточно было лишь зафиксировать последовательность смены фаз.

Примечание: Участники, не знавшие формулы для синодического периода, могли вывести ее, например, следующим образом. Венера обращается вокруг Солнца (по отношению к звездам) с угловой скоростью $360°/T_{♀}$, а Земля обращается вокруг Солнца (по отношению к звездам) с угловой скоростью $360°/T_{\oplus}$, причем оба движения совершаются в одну сторону (против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса) и угловая скорость Земли меньше, чем у Венеры. Значит видимая угловая скорость движения Венеры при наблюдении с Земли (относительная угловая скорость) будет равна разности этих скоростей:

$$\frac{360°}{T_{♀}} - \frac{360°}{T_{\oplus}}$$

Если учесть, что полный оборот в 360° **относительно Земли** Венера совершает за синодический период S, приравняв предыдущее выражение дроби $360°/S$, получим уравнение синодического движения.

13. Основной сложностью задачи является выяснение того, как сосчитать объем тора. Тут можно действовать как минимум двумя возможными способами.

Во-первых, можно «вписать» тор в цилиндр с круглой дырой вдоль оси — высота цилиндра будет равна 1 а.е., внешний радиус основания — 3 а.е., а внутренний радиус (т.е. радиус дыры) — 2 а.е. Далее, можно легко заметить, что если вырезать из тора узкий сектор, то сечения тора плоскостями, граничивающими сектор, будут окружностями, а сечение «цилиндра с дыркой» — квадратом со стороной, равной диаметру окружности. Отсюда, найдя отношение площадей круга и квадрата, можно, домножив объем цилиндра на этот коэффициент, получить итоговый объем тора.

Второе соображение проще. На каждом небольшом участке тор представляет собой «искривленный» цилиндр, объем которого, что легко показать, совпадает с объемом того же цилиндра, но «распрямленного».

Оба варианта дают один и тот же ответ: объем тора оказывается равным $2\pi \cdot 2.5 \cdot \pi(1/2)^2 = = (5/4) \cdot \pi^2 \approx 12$ а.е.^{3}. Следовательно, на каждый астероид в среднем приходится объем $12 \cdot 10^{-6}$ а.е.^{3}, а среднее расстояние между астероидами равно кубическому корню из этого объема, т.е. $\sqrt[3]{12 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{12} \cdot 10^{-2} \approx 0.02$ а.е.

14. Доведем ситуацию до абсурдной — если бы наблюдатель мог вести наблюдения круглые сутки, то он, очевидно, за это время совершил бы полный оборот вокруг объектива. Конечно, на практике это невозможно и из-за захода звезды за горизонт, и из-за дневного времени, и из-за невозможности увидеть что-то на большом угловом расстоянии от главной оптической оси объектива, однако на том небольшом отрезке времени, который нас интересует, наблюдатель движется так же, как если бы он ходил вокруг шеста с объективом по кругу.

Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$, т.е. примерно за 24 часа (точнее, за 23 часа 56 минут — продолжительность звездных суток) наблюдатель прошел бы 314 метров. Тогда получаем, что скорость движения наблюдателя составляет около 13 м/час или примерно треть сантиметра в секунду.

15. Вспомним, каковы характерные расстояния между молекулами вещества в разных агрегатных состояниях. В случае твердых тел и жидкостей известно, что характерное расстояние между молекулами близко к размеру самих молекул, т.е. молекулы практически «соприкасаются» друг с другом. То же самое можно сказать и про атомы внутри молекул, поэтому мы можем сделать вывод, что средняя плотность атома близка к средней плотности обычных веществ в твердом и жидком состоянии, т.е. она порядка $10^3 \div 10^4$ кг/м^3.

Из условия следует, что объем атомного ядра примерно в 10^{15} раз меньше объема атома. Так как масса каждого атома практически полностью сосредоточена в его ядре, то плотность атомного ядра должна быть в те же 10^{15} раз больше средней плотности атома. Отсюда делаем вывод, что характерная плотность атомного ядра (и нейтронных звезд) порядка $10^{18} \div 10^{19}$ кг/м^3 (и, заметим, эта оценка вполне соответствует действительности). Отсюда получаем, что объем нейтронной звезды — это величина порядка 10^{12} м^3, и, следовательно, характерный размер нейтронной звезды $\sqrt[3]{10^{12}} = 10^4$ м, т.е. около 10 км.

Районный тур — Ленинградская область

9 класс

36. Все перечисленные объекты — созвездия, и только **Тарантул** — название газовой туманности. Оно-то и является лишним в данной цепочке.

37. На каждую звезду в скоплении Плеяд приходится объем $V = 4/3\pi R^3/n$, где R — радиус скопления, а n — количество звезд. $V \approx 0.9\,$св.год^3 на 1 звезду. Т.к. среднее расстояние между звездами соответствует линейному размеру ячейки d, приходящейся на 1 звезду, находим $d \approx V^{1/3} \approx$ **1 св. год**.

38. Т.к. длина штриха соответствует угловому размеру в $0^\circ\!.5$ — угловому размеру Луны, легко вычислить время экспозиции. Размер штриха показывает, что небесная сфера за время экспозиции повернулось на $0^\circ\!.5$. Т.к. скорость вращения небесной сферы 360°/сутки $= 15^\circ$/1час $= 1^\circ$/4 минуты, легко видно, что на $0^\circ\!.5$ небесная сфера повернулась за 2 минуты, следовательно, **время экспозиции — 2 минуты**.

39. Полная Луна видна в полночь, т.е. когда она в противостоянии к Солнцу. Т.к. зимой Солнце днем низко над горизонтом, то Луна ночью высоко. Т.к. Луна обращается вокруг Земли примерно в плоскости эклиптики, то максимальный угол между плоскостью орбиты Луны и плоскостью экватора $23^\circ\!.5 + 5^\circ = 28^\circ\!.5$. Широта Санкт-Петербурга $\varphi = 60^\circ$. Значит, угол между плоскостями экватора и горизонта $\varphi = 30^\circ$. Таким образом, максимальная высота Луны над горизонтом $\mathbf{h = 28^\circ\!.5 + 30^\circ = 58^\circ\!.5}$.

40. 500 дней — это синодический период малой планеты. Определим сидерический период планеты. Воспользуемся известным выражением, связывающим сидерические и синодический периоды планет. $|1/365 - 1/T| \approx 1/500$. Отсюда легко получить период $T \approx 1353^d = 3.7\,$года. Зная период, по 3-му закону Кеплера $T^2 = a^3$ можно найти радиус орбиты малой планеты:

$$a = T^{2/3} = 3.7^{2/3} \approx 2.37\,\text{а.е}$$

Когда малая планета находится в противостоянии, расстояние до нее (S) определяется так:

$$\mathbf{S = 2.37 - 1 \approx 1.4\,\text{а.е.}}$$