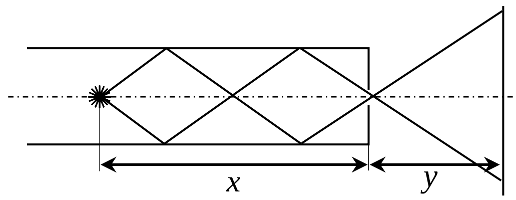
Решения

1. Через отверстия пройдут лучи, падающие непосредственно на отверстие, но не только они. Через отверстие пройдут лучи, попавшие на него после отражений от зеркала. В частности, лучи, упавшие на поверхность зеркала на расстоянии $x/2$ от конца трубы (см. рисунок), не расстоянии $x/3$ (рисунок), $x/4$ и т.д. А лучи, падающие на внутреннюю поверхность трубки под углами, большими, чем те, что показаны на верхнем рисунке, в отверстие не попадут. А это значит, что на экране мы увидим систему ярких колец в тех местах, куда попадут лучи, и неосвещенных – в тех местах, куда лучи не попадут. Радиусы этих колец можно найти из следующих соображений. Лучи, образующие первое кольцо, испытают одно отражение от внутренней поверхности трубки ровно посередине от источника до отверстия. Поэтому из подобия треугольников АВО и A_1B_1O имеем для радиуса первого кольца r_1



$$\frac{AB}{BO} = \frac{OB_1}{A_1B_1} \qquad \Rightarrow \qquad A_1B_1 = r_1 = \frac{yr}{x/2} = \frac{2yr}{x}$$

Лучи, образующие второе кольцо, испытают два отражение от внутренней поверхности трубки; первое из их - на расстоянии $x/4$, и т.д. Поэтому для радиуса n-го кольца находим

$$r_2 = \frac{yr}{x/2n} = \frac{2nyr}{x}$$

В частности, для радиуса пятого кольца получаем

$$r_5 = \frac{10yr}{x}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Правильное объяснение принципа возникновения колец - 0,5 балла
2. Правильное построение хода лучей, формирующих кольца – 0,5 балла
3. Правильный метод вычисления радиусов колец – 0,5 балла
4. Правильные вычисления радиуса пятого кольца – 0,5 балла

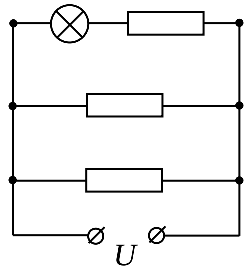
2. Вода наливается в нижний отсек кофеварки, который закрывается герметично. Этот отсек связан с верхним (открытом в атмосферу) отсеком кофеварки трубочкой, начало которой лежит ниже уровня воды (когда этот отсек заполнен). Между верхним и нижним отсеками кофеварки размещается молотый кофе, ограниченный сверху и снизу мелкой сеткой, не допускающей его проникновение в верхний и нижний отсеки.

Кофеварка с водой ставится на плиту. Когда вода закипает, образующийся в нижнем отсеке водяной пар благодаря герметичности нижнего отсека создает в нем повышенное давление, давит на поверхность воды и заставляет воду подниматься по трубке. При этом герметичность нижнего отсека должна быть такой, чтобы она выдержала давление, равное давлению столба жидкости высотой с трубку в кофеварке. Поднимаясь по трубке, кипяток проходит через молотый кофе и становится жидким кофе. Этот кофе вытекает через трубку в верхний отсек, откуда его уже можно разлить по чашкам.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное объяснение основного принципа работы кофеварки – пропускание кипятка через кофейный порошок – 0,5 балла.
2. Правильное объяснение функций отсеков кофеварки – где вода, где кофейный порошок, где кофе – 0,5 балла.
3. Правильное объяснение необходимости герметичного отсека и оценка его возможностей держать избыточное давление – 0,5 балла
4. Правильное объяснение механизма выталкивания воды – образование большого количества пара при ее кипении, и выталкивание воды паром – 0,5 балла.

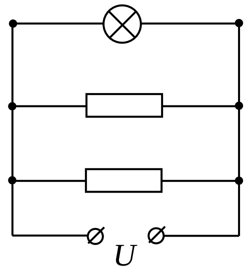
3. Рассматриваемая электрическая цепь имеет 4 режима работы: (1) оба выключателя выключены, (2) включен K_1, выключен K_2, (3) включен K_2, выключен K_1, (4) оба выключателя включены. Рассмотрим работу цепи в каждом случае, найдем мощность, выделяемую на лампочке, сравним результаты.



1 случай – оба выключателя выключены. В этом случае наша цепь сводится к цепи, показанной справа на рисунке. Поскольку сопротивление лампочки равно сопротивлению резистора, напряжение на ней равно $U/2$, и, следовательно, выделяемая мощность есть

$$P_1 = \frac{(U/2)^2}{R} = \frac{1}{4}\frac{U^2}{R} = \frac{1}{4}P_0$$

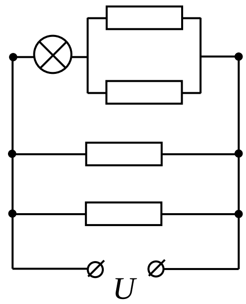
Где R - сопротивление лампочки, P_0 - ее номинальная мощность (при условии, что она рассчитана на работу в данной электрической сети).



(2) включен выключатель K_1, выключен выключатель K_2. В этом случае цепь сводится к цепи, показанной справа на рисунке. И, следовательно, мощность выделяемая на лампочке совпадает с ее номинальной мощностью

$$P_2 = \frac{U^2}{R} = P_0$$

(3) включен выключатель К2, выключен выключатель К1. В этом случае наша электрическая цепь сводится к цепи, показанной справа на рисунке. При этом на нее приходится две трети напряжения источника $2U/3$ (поскольку включенный с ней последовательно резистор имеет сопротивление $R/2$). Следовательно, выделяемая на лампочке мощность в этом случае есть



$$P_3 = \frac{\left(2U/3\right)^2}{R} = \frac{4}{9}\frac{U^2}{R} = \frac{4}{9}P_0$$

(4) и последний случай – включены оба выключателя. В этом случае электрическая цепь получается такой же, как и в случае (2) и выделяемая на ней мощность равна ее номинальной мощности

$$P_4 = \frac{U^2}{R} = P_0$$

Таким образом, отношение мощностей, выделяемых на лампочке в рассматриваемых четырех случаях (начиная с наибольшей и заканчивая наименьшей), есть

$$P_2 : P_4 : P_3 : P_1 = 1:1:\frac{4}{9}:\frac{1}{4}$$

Т.е. максимальная мощность выделяется в случаях (2) и (4), минимальная – в случае (1).

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Правильное понимание и объяснение того, что лампочка горит максимально ярко тогда, когда она подключается к сети без других сопротивлений - 0,5 балла
2. Правильные вычисления мощностей при замкнутых ключах – 0,5 балла
3. Правильные вычисления мощностей при одном замкнутом ключе – 0,5 балла
4. Правильные вычисления мощностей при разомкнутых ключах – 0,5 балла

4. Найдем число витков ленты на приемной катушке (после того, как она будет полностью намотана на катушку). Если радиус катушки с лентой равен R, то число витков есть

$$N = \frac{R-r}{d} \qquad (*)$$

С другой стороны, длину ленты можно найти как (с учетом того, что она – тонкая)

$$L = 2\pi r + 2\pi\left(r+d\right) + 2\pi\left(r+2d\right) + ...2\pi\left(r+Nd\right) = 2\pi rN + 2\pi d(1+2+...+N) =$$
$$2\pi rN + \pi dN^2 = \pi N\left(R+r\right)$$

(Отметим, что получившийся результат является естественным. Длина ленты равна произведению числа витков на среднюю длину одного витка, которая из-за линейной зависимости длины витка от радиуса равна среднему арифметическому самого длинного - $2\pi R$ - и самого короткого - $2\pi r$ - витка). Отсюда с учетом формулы (*) находим радиус намотанной катушки

$$L = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{d} \qquad \Rightarrow \qquad R = \sqrt{r^2 + \frac{dL}{\pi}}$$

а затем по формуле (*) и число витков намотанной ленты

$$N=\frac{\sqrt{r^2+\frac{dL}{\pi}}-r}{d}=\frac{\sqrt{\pi r^2+dL}-\sqrt{\pi}r}{\sqrt{\pi}d}$$

Поскольку катушка вращается с постоянной угловой скоростью, каждый оборот она делает за одно и то же время, и потому полное время наматывания равно

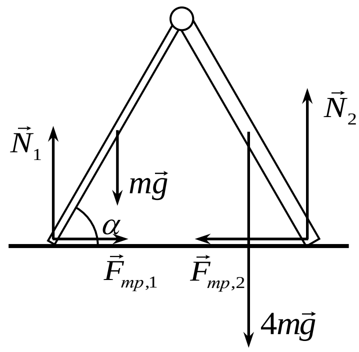
$$t=N\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\left(\sqrt{\pi^2r^2+\pi dL}-\pi r\right)}{d\omega}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея вычисления времени перемотки – нахождение числа оборотов ленты – 0,5 балла.
2. Правильное нахождение числа оборотов ленты (и обоснование, если используется длина среднего оборота) – 0,5 балла.
3. Обоснование того, что каждый оборот наматывается на приемную катушку за одно и то же время – 0,5 балла
4. Правильные вычисления – 0,5 балла.

5. Рассмотрим условие равновесие всей лестницы целиком. Уравнение моментов относительно точки опоры левого стержня дает

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha+4mg\frac{3l}{2}\cos\alpha=N_2 2l\cos\alpha$$



где l - длина каждого стержня. Отсюда получаем

$$N_2=\frac{13}{4}mg$$

Аналогично, из уравнения моментов относительно правой опоры, получаем

$$N_1=\frac{7}{4}mg$$

Поскольку половинки лестницы соединены шарнирно, в точке соединения не создается сосредоточенного момента, и можно записать уравнение моментов для правой и левой половинок лестницы относительно шарнира. Например, для правой половинки имеем

$$4mg\frac{l}{2}\cos\alpha+F_{тр,2}l\sin\alpha=N_2 l\cos\alpha \qquad\Rightarrow\qquad F_{тр,2}=\frac{5}{4}mg\,\mathrm{ctg}\alpha$$

Правая половинка лестницы будет оставаться в равновесии при выполнении условия

$$F_{тр,2}\le kN_2$$

Или

$$\frac{5}{4}mg\,\mathrm{ctg}\alpha\le k\frac{13}{4}mg \qquad\Rightarrow\qquad \mathrm{tg}\alpha\ge\frac{5}{13k} \qquad\Rightarrow\qquad \alpha\ge\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{13k}\right) \qquad (*)$$

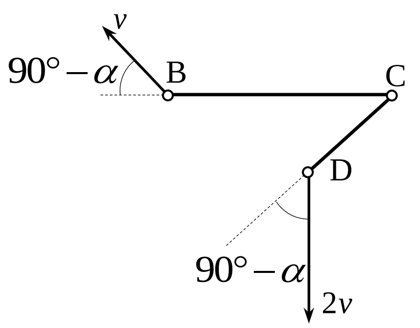
Аналогично находим, что левая половинка лестницы будет оставаться в равновесии при выполнении условия

$$\frac{5}{4}mg\,\mathrm{ctg}\alpha \le k\frac{7}{4}mg \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{tg}\alpha \ge \frac{5}{7k} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \ge \mathrm{arctg}\left(\frac{5}{7k}\right) \qquad (**)$$

Поскольку тангенс – монотонно растущая функция, при раздвижении половинок лестницы (уменьшении угла α) первым нарушится условие (**). Т.е. начнет скользить легкая половинка. Это легко объяснить – до начала скольжения силы трения должны быть одинаковы (условие сил в проекциях на горизонтальную ось), а сила реакции меньше для более легкой половинки лестницы. Поэтому условие $F_{mp} \le kN$ нарушится для легкой половинки. Поэтому лестница будет в равновесии при

$$\alpha \ge \mathrm{arctg}\left(\frac{5}{7k}\right).$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – использование уравнений статики (и, в частности, уравнения моментов относительно шарнира) – 0,5 балла
2. Правильное использование условия начала скольжения – достижении е силой трения максимального значения – 0,5 балла
3. Правильная расстановка сил, правильные уравнения – 0,5 балла
4. Правильный результат – 0,5 балла



Решение. Рассмотрим движение стержней BC и CD. Так как точка B принадлежит и стержню AB, который только вращается, ее скорость направлена перпендикулярно отрезку AB. Точка D принадлежит и стержню AD, поэтому ее скорость направлена перпендикулярно этому стержню, а по величине вдвое больше скорости точки B (так как угловые скорости стержней AB и AD одинаковы, а длина стержня AD вдвое больше длины стержня AB). Поэтому скорости точек B и D направлены так, как показано на рисунке ($\angle BAD = \alpha$), и отличаются в два раза по величине. Из условия несжимаемости стержней BC и CD имеем, что проекции скоростей концов стержня на сам стержень равны друг другу в любой момент времени. Поэтому для скорости точки C имеем (при условии, что вектор скорости $\vec{v}_C$ направлен вдоль стержня CD):

$$v_C \cos\alpha = 2v\sin\alpha$$
$$v_C = 2v\sin\alpha$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 60°$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – использование условий нерастяжимости стержней – 0,5 балла

2. Правильное нахождение скоростей точек B и D – 0,5 балла

3. Правильные уравнения для скорости точки C через условия нерастяжимости двух стержней 0,5 балла

4. Правильный результат – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.