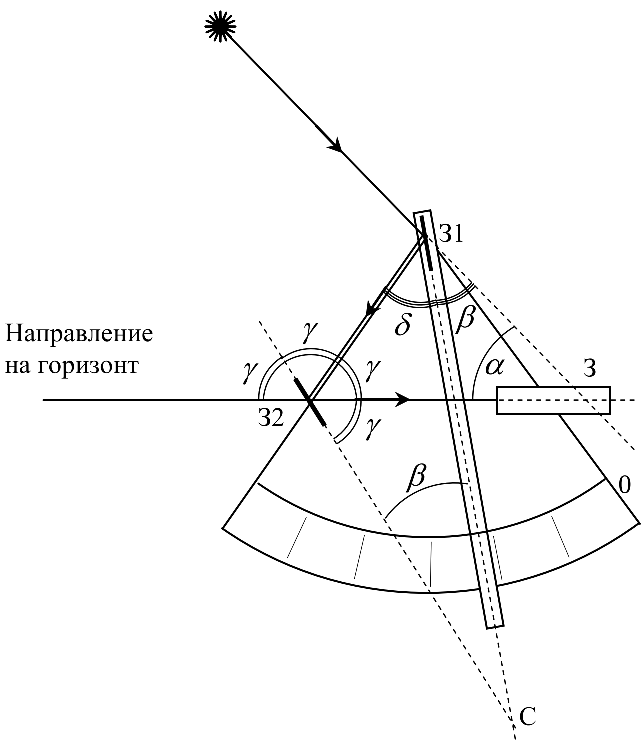
Ответы и решения



1. Секстант работает следующим образом. Необходимо в зрительную трубу видеть линию горизонта (через полупрозрачное зеркало З2) и вращая алидаду добиться такого положения, что изображение звезды, угол склонения которой над горизонтом надо измерить (угол α на рисунке), в двух зеркалах попадает точно на линию горизонта. Схема отражения лучей зеркалами секстанта в этом случае показана на рисунке. Докажем, что угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба (угол СЗ10 на рисунке, или, что то же самое, З2СЗ1 из-за параллельности зеркала З2 нулевому отсчету шкалы лимба) равен половине угла α. Действительно, чтобы через полупрозрачное зеркало З2 можно было видеть линию горизонта (при горизонтальном расположении зрительной трубы и при том, что угол раствора секстанта равен $60°$), оно должно быть установлено так, чтобы все углы, отмеченные двумя дугами равнялись бы друг другу и равнялись $\gamma = 60°$. Далее, из закона отражения заключаем, что пара углов - между зеркалом З1 и отраженным от него лучом, и между зеркалом З1 и продолжением падающего луча, равны друг другу (отмеченных тремя дугами на рисунке и обозначены как δ). Из треугольника З1З2С имеем

$$120° + \beta + \delta = 180° \qquad \Rightarrow \qquad \beta + \delta = 60° \qquad (1)$$

С другой стороны, из треугольника З1З2В имеем

$$60° + 2\delta + \alpha = 180°, \qquad \Rightarrow \qquad 2\delta + \alpha = 120° \qquad (2)$$

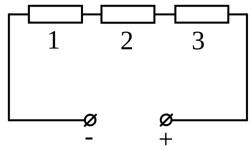
Из (1), (2) получаем, что

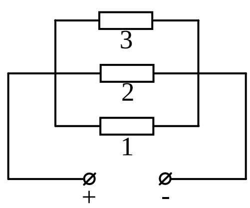
$$\alpha = 2\beta$$

Таким образом, измеряя по шкале лимба угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы и умножая его на 2, получаем угол склонения звезды над горизонтом.

На палубе корабля (даже при сильной качке) секстантом пользуются так. При качке корабля зрительную трубу трудно навести на горизонт, и мы в ней видим все время меняющуюся картину – то выше, то ниже горизонта. Но во время качки в трубе в какие-то моменты видно линию горизонта. Медленно вращая алидаду, добиваемся, такого положения, чтобы именно в те моменты, когда труба проходит через линию горизонта, отражение звезды в двух зеркалах попадало точно на эту линию. В этом положении измеряем угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба и умножаем на 2.

2. В зависимости от полярности приложенного напряжения данная цепь имеет вид, показанный на либо на левом, либо на правом рисунке: при «закрытых» диодах резисторы соединены последовательно, при «открытых» - параллельно. Поэтому в течение половины времени, отвечающей левому рисунку на резисторах будет выделяться следующая мощность





$$P_{1,1} = \frac{U^2 r_1}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{32R}, \; P_{2,1} = \frac{U^2 r_2}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{32R}, \; P_{3,1} = \frac{U^2 r_3}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{16R}$$

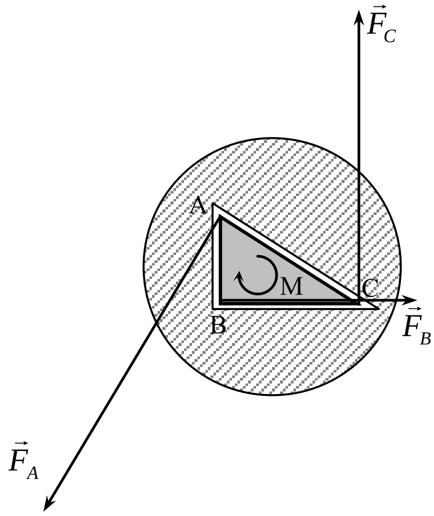
(2 в знаменателе – из-за необходимости использовать действующее значение напряжения). В течение второй половины времени (правый рисунок) на резисторах выделяется

$$P_{1,2}=\frac{U^2}{2R},\ P_{2,2}=\frac{U^2}{2R},\ P_{3,2}=\frac{U^2}{4R}$$

Поэтому за большое время на резисторах выделяются следующие средние мощности

$$P_{1,cp}=\frac{P_{1,1}+P_{1,2}}{2}=\frac{17U^2}{64R},\ P_{2,cp}=\frac{P_{2,1}+P_{2,2}}{2}=\frac{17U^2}{64R},\ P_{3,cp}=\frac{P_{3,1}+P_{3,2}}{2}=\frac{5U^2}{32R}$$

3. Силы, с которыми стенки полости действуют на грани ключа, и точки их приложения показаны на рисунке. Из-за отсутствия трения эти силы перпендикулярны граням шлица и ключа. Поскольку сумма сил, действующих на ключ, равна нулю, а сумма двух сил, создающих момент M, также равна нулю (пара сил), должна быть равна нулю сумма $\vec{F}_A+\vec{F}_B+\vec{F}_C$. Это значит, что эти силы образуют треугольник, причем из-за перпендикулярности сил граням ключа, подобный сечению ключа. Из соотношений подобия заключаем, что



$$\frac{F_B}{F_C}=\frac{a}{b}$$

где a и $b=3a/2$ - катеты сечения ключа. С другой стороны, условие моментов относительно вершины А дает

$$F_Ba+F_Cb=M$$

Из этих двух уравнений находим силы F_B и F_C

$$F_B=\frac{4M}{13a},\ F_C=\frac{6M}{13a}$$

а затем по теореме Пифагора – силу F_A

$$F_A=\frac{2M}{\sqrt{13}a}.$$

4. Очевидно, при параллельном соединении насосов каждый из них работает при одинаковом напоре Δp (разность давлений жидкости после и до насоса). А вот расходы, которые обеспечивают насосы, складываются. Используя напорно-расходные характеристики первого и второго насоса, найдем расход при напоре $\Delta p=p_0/2$:

$$\mu\left(p_0/2\right)=\sqrt{\frac{p_0}{2\alpha}}+\frac{p_0}{2\beta}$$

При заданном расходе μ_0 системы насосов расход жидкости через насосы распределяется так, чтобы напор первого и второго насосов был одинаковым:

$$\mu_0=\mu_1+\mu_2$$
$$p_0-\alpha\mu_1^2=p_0-\beta\mu_2$$

Отсюда

$$\mu_1=\frac{\sqrt{\beta^2+4\alpha\beta\mu_0}-\beta}{2\alpha}$$

Подставляя теперь это значение в напорно-расходную характеристику, получим

$$\Delta p=p_0-\alpha\left(\frac{\sqrt{\beta^2+4\alpha\beta\mu_0}-\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Отметим, что можно провести аналогию между течением жидкости в трубопроводе и электрическим током: расход-электрически ток, напор-разность потенциалов, насос-источник ЭДС.

5. Если бы пар был насыщенным, то скорости испарения и конденсации совпадали бы. Другими словами, количество молекул покидающих жидкость, равнялось бы числу молекул, попадающих в жидкость из пара. Последнюю величину можно вычислить так же, как вычисляют число столкновений молекул идеального газа со стенкой сосуда (считая для оценки, что каждая молекула, падающая из пара на поверхность жидкости, становится молекулой жидкости). Число молекул, сталкивающихся с площадкой площади ΔS за время Δt, можно вычислить как

$$\Delta N = \frac{1}{6} nv\Delta S\Delta t$$

где n - концентрация молекул газа, v - средняя скорость (эта формула выводится в любом учебнике по молекулярной физике в разделе, где вычисляется давление идеального газа). Умножая это выражение на массу одной молекулы, находим массу воды, конденсирующейся на площадку ΔS за время Δt

$$\Delta M = \frac{1}{6}\rho v\Delta S\Delta t$$

где ρ - плотность пара. Произведение ρv выразим через давление и температуру пара. Поскольку

$$p = nkT = \frac{1}{3}nmv^2 = \frac{1}{3}\rho v^2,$$

то

$$v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

Отсюда

$$\Delta M = \frac{1}{6}\sqrt{3p\rho}\Delta S\Delta t$$

Используя далее закон Клапейрона-Менделеева

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

где $\mu = 18$ г/моль – молярная масса воды, R - универсальная газовая постоянная, найдем скорость конденсации пара на единицу площади жидкости

$$v_M = \frac{1}{6} p\sqrt{\frac{3\mu}{RT}} \qquad (*)$$

Если бы пар был насыщенным, то ровно столько воды и испарялось бы. Поэтому скорость испарения воды при температуре T определяется этой формулой (*) с p равным давлению насыщенного пара при данной температуре. Учитывая, что наш пар имеет относительную влажность 70 %, семьдесят процентов испарившейся воды конденсируется назад, поэтому результирующая скорость испарения равна

$$v_M = \frac{0,3}{6} p\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}$$

Подставляя данные значения, получим

$$v_M = 0,6\,\frac{кг}{м^2 \cdot c}$$

Отсюда находим время испарения

$$t = \frac{M}{Sv_M} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{1\cdot 10^{-2}\cdot 0,6} = 3 \text{ с}$$

Полученный результат парадоксален – время испарения воды из блюдца, как говорит нам об этом наш бытовой опыт, должно составить порядка суток. Однако его легко объяснить, если вспомнить, что мы можем очень сильно увеличить скорость испарения воды «сдувая» пар, образовавшийся над водой в результате испарения. Это значит, что вблизи поверхности пар является почти насыщенным независимо от того, какова его относительная влажность во всем помещении. Поэтому наша оценка, основанная на предположении об одинаковости относительной влажности во всем помещении, является очень неточной. А правильная оценка времени испарения сильно зависит от внешних условий – даже небольшое движения воздуха над поверхностью жидкости будет сильно менять время испарения.

6. Пусть в единицу времени через сечение трубы протекает масса воды Δm. Обозначим температуру воды посередине трубы t_x. Тогда первая половина трубы теряет в единицу времени количество теплоты - $c\Delta m\left(t_1 - t_x\right)$, вторя половина трубы - $c\Delta m\left(t_x - t_2\right)$.

С другой стороны, эти количества теплоты уходят в помещение через боковые стенки труб, причем поток тепла в разных точках трубы является разным, поскольку разной является разность температур между каждой точкой и помещением. Однако полный поток тепла от каждой половины трубы должен быть пропорционален разности температур между температурой какой-то ее точки (например, начала трубы) и температурой помещения. Действительно, если бы эти температура начала трубы и помещения совпадали бы, поток тепла от трубы в помещение равнялся бы нулю. Поэтому для потока тепла между первой половиной трубы и помещением Q_1 можно записать

$$Q_1 = \eta\left(t_1 - t\right)$$

где коэффициент пропорциональности η зависит от «геометрии» трубы (но не температуры). А поскольку «геометрия» второй половины трубы – точно такая же как у первой, то для потока тепла от второй половины трубы Q_2 имеем

$$Q_2 = \eta\left(t_x - t\right)$$

Поэтому соотношения для потоков тепла от первой и второй половин дают

$$c\Delta m\left(t_1 - t_x\right) = \eta\left(t_1 - t\right)$$

$$c\Delta m\left(t_x - t_2\right) = \eta\left(t_x - t\right)$$

Деля эти соотношения друг на друга, получим

$$t_x^2 - 2tt_x + t_2 t + t_1 t - t_2 t_1 = 0$$

Из квадратного уравнения найдем искомую температуру t_x

$$t_x = t + \sqrt{\left(t - t_2\right)\left(t - t_1\right)} = 45^\circ\ \text{C}$$

Критерии оценки работ

1 задача. Если школьник разобрался с чертежом – 0,5; Если понял, как работает секстант – 1 балл; Если правильно построен ход лучей, объяснены принципы работы секстанта – 1,5; Если сделано все предыдущее и объяснено, как секстант работает в шторм – **2 балла.**

2 задача. Если школьник сформулировал основную идею, но не довел до конца – 0,5 балла; Если все правильно – **1 балл.**

3 задача. Правильные попытки использовать уравнения статики (без правильных уравнений) – 0,5 балла; правильные уравнения – 1 балл; часть ответов правильна, часть нет – 1,5 балла; все правильно – **2 балла.**

4 задача. Правильна идея (без реализации) – 0,5 балла. Если к тому же есть правильная попытка провести аналогию с цепями постоянного тока – 1 балл. Все более или менее правильно, но недочеты в реализации – 1,5 балла. Все правильно – **2 балла.**

5 задача. Правильная идея (без реализации) – 0,5; Сделаны попытки посчитать количество сконденсировавшихся молекул – 1 балл; Правильно посчитана скорость испарения (вместе с числом) – 1,5 балла. Правильное объяснение результата (100 % влажность около поверхности) – **2 балла.** За недочеты на каждом пункте – снижать на 0,5 балла.

6 задача. Правильные исходные уравнения – 1 балл; Правильная реализация, но неправильный расчет – 2 балла, Все правильно – **3 балла**. За недочеты на каждом пункте – снижать на 0,5 балла.

Оценки за все задачи складываются (максимальная оценка – 12 баллов); если суммарная оценка окажется «полуцелой» – округлять до ближайшего целого числа с избытком или недостатком по усмотрению проверяющего.