VI Открытый республиканский физико-технический конкурс школьников «Исследуем и проектируем»

Олимпиада по математике (II тур)

11 класс

1. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен 7 $\sqrt{3}$ -2 .

   Если взять в качестве второго корня сопряженное к первому корню число -7 $\sqrt{3}$ -2 , то коэффициенты искомого квадратного уравнения, которые можно найти из теоремы Виета будут целыми. Одно из уравнений, удовлетворяющих условию задачи, такое: x^2 +4x –143 = 0.

   Любое верное уравнение при наличии обоснования, что один из корней равен заданному значению – 7 баллов.

2. Решите уравнение $\frac{x}{|x|} \leq \sqrt{17-x^2}$.

   Решение. 1) Если $x>0$ *, то неравенство примет вид* $1 \leq \sqrt{17-x^2}$ *,*
   $17-x^2 \geq 1$ *,*
   $x^2 \leq 16$ *,* $0<x \leq 4$ *.*

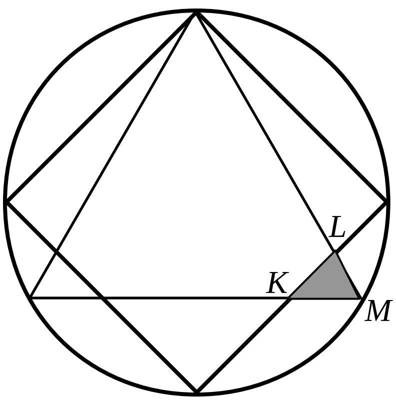
   2) Если $x<0$ *, то неравенство примет вид* $-1 \leq \sqrt{17-x^2}$ *. Данное неравенство выполнено при любом* x *из промежутка* $(-\infty;0)$ *.*

   3) Объединяя результаты получаем решение $(-\infty;0) \cup (0;4]$ *.*

   Ответ: $(-\infty;0) \cup (0;4]$ *.*

   Решение только пунктов 1), 2) – 2 балла, верное решение – 7 баллов.

3. В круг радиуса 2 $\sqrt{2}$ вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.



Решение. Сторона квадрата равна 4, а сторона равностороннего треугольника – 2 $\sqrt{6}$ *. Площадь общей части треугольника и квадрата равна разности площади* *равностороннего треугольника и удвоенной площади треугольника KLM вне квадрата, расположенного напротив общей вершины треугольника и квадрата. Площадь равностороннего треугольника равна 6* $\sqrt{3}$ *. Найдем площадь треугольника KLM. Имеем KM=* $\sqrt{6}$ - $\sqrt{2}$ *, углы при вершинах K, L, M соответственно равны 45º, 75º, 60º. Пусть LM=x, то по теореме синусов*

$$\frac{x}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sin 75^\circ}, \qquad x=4\sqrt{2}-2\sqrt{6},$$

$$S_{KLM}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^3.$$

Итак, площадь общей части треугольника и квадрата равна

$$6\sqrt{3}-2S_{KLM}=16\sqrt{3}-18.$$

Ответ: $16\sqrt{3}-18$.

Верное решение – 7 баллов, допущение арифметической ошибки – 6 баллов.

4. Решить уравнение:

$$2010\cos\sqrt{x}+1=2011\,e^{x}.$$

Ответ: x=0.

Решение. При положительных x правая часть больше 2011, а левая не больше 2011. При x=0 равенство выполнено.

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

5. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью равной 9 м^2, а высота призмы в два раза больше гипотенузы основания. Найти высоту призмы, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?

Решение. Если x и y – катеты прямоугольного треугольника основания; h – высота прямой призмы, то площадь боковой поверхности призмы равна

$$S_{\text{бок}} = (x+y)h + h^2/2.$$

Так как xy=18, $x^2+y^2=h^2/4,$ *то* $x+y=\sqrt{144+h^2}/2.$ *Следовательно,* $S_{\text{бок}}=(1/2)\sqrt{144+h^2}h+h^2/2$ *и боковая поверхность призмы будет наименьшей при наименьшей высоте h, т.е. при наименьшей гипотенузе основания* $h_{\min}=6.$ *Итак, высота призмы равна 12.*

Ответ: 12.

Верное решение – 7 баллов, допущение арифметической ошибки – 6 баллов.

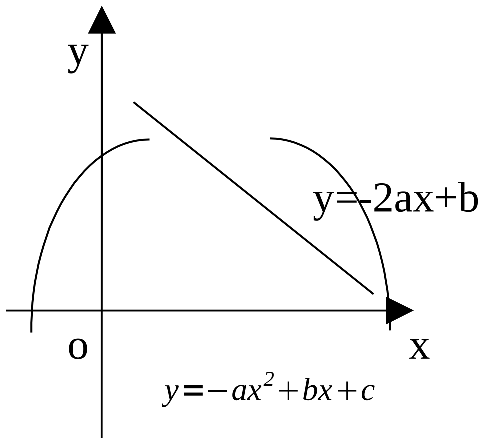
VI Открытый республиканский физико-технический конкурс школьников

«Исследуем и проектируем»

Олимпиада по математике (II тур)

11 класс

1. Почему на рисунке изображена невозможная ситуация?



Решение. Решение: Значение линейной функции в точке b/2a (абсцисса вершины параболы) равно 0. По графику прямой видно, что значение в этой точке положительно. Противоречие.

2. Найти наименьшее значение выражения:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y+8)^2}.$$

Ответ:15. Данное выражение представляет собой сумму расстояний до точек с координатами (-3,4) и (6,-8).

Верный ответ без обоснования, но с примером – 1 балл.

3. Угол при основании равнобедренного треугольника *ABC* равен *75*º, а площадь равна *S*. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот треугольника *ABC*.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})S.$

4. Решите уравнение:

$$\log_2(2011 + 2009\cos 4x) = sin^2(x + \frac{\pi}{4}).$$

Решение. Левая часть не меньше 1, правая не больше 1. Равенство выполнено только если cos4x= -1, sin (x+π/4)=±1. Решая систему уравнений, получаем x=π/4 + πn, nϵZ.

5. Дан куб с основанием *ABCD* и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1; длина ребра куба равна $16\sqrt{2}$. Через вершину *B* и середину ребер AA_1 и C_1D_1 проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Ответ: $\frac{11}{3}\sqrt{58}$.