



Математика для школьников

Математика

Категория участников: школьники 7-11 классов

Блок теоретических заданий по **математике для школьников 7-11 классов** включает задачи разной сложности. Для повышения вероятности прохождения на очный тур Вам желательно решить задачи не только по математике, но и по физике, биологии, химии, чтобы набрать больше баллов. Дополнительные баллы будут начислены за прохождение тестов [викторин по предметам](#). Все прошедшие на очный тур обязательно решают задачи по всем четырем предметам.

Задания

1. Практические нанотехнологии 18 века: опыт Бенджамин Франклина

О том, что пленка масла способна «сковывать» волнующуюся поверхность воды, знали еще в Древнем Риме. Однако первые количественные описания этого явления были сделаны Бенджамином Франклином. Ниже приведен текст из заметок Б. Франклина...

2. Полимеразная цепная реакция

Полимеразная цепная реакция (ПЦР) является одним из важнейших методов молекулярной биологии, который позволяет многократно «скопировать» исходную молекулу или фрагмент ДНК, и широко применяется как в научных исследованиях, так и в медицине и криминалистике...

3. Рассматривая двумерный углерод - net-Y

Многим из вас знаком двумерный углерод – графен, представляющий собой шестиугольную сетку, в узлах которой находятся атомы углерода (см. рис. в файле задачи). Большой интерес к этому материалу вызванный, в том числе, его уникальными электронными свойствами...

4. Симметричные фуллерены: C₂₀, C₂₀₀₀ и C₂₀₂₀

Молекулы фуллеренов C_N представляют собой выпуклые многогранники, имеющие только пяти- и шестиугольные грани, в каждой вершине которых находится атом углерода и сходится по три ребра. Для фуллерена C₂₀₂₀ рассчитайте число ребер, пяти- и шестиугольных граней...

5. От фуллеренов к боросференам

Предсказание в 1973 и открытие в 1985 году каркасных молекул, состоящих только из атомов углерода – фуллеренов – вдохновили ученых всего мира на поиски подобных структур и для других элементов, в том числе, при помощи методов компьютерного моделирования...

6. Нанопружинка

По рисунку в файле задачи оцените параметры спирали: ширину формирующей ее ленты w , диаметр D и шаг H спирали. Исходя из полученных данных, рассчитайте длину витка спирали L и угол ее закрутки α . Какова длина ленты l_{nb} , формирующей спираль...

7. Строим полые кластеры из металла

Рассмотрим полые металлические кластеры (ПМК) как металлическую оболочку толщиной в один атом, имеющую форму многогранника (см. рис. в файле задачи), такого, что все его ребра равны между собой. Эту оболочку легко представить как вырезанную и склеенную «выкройку»...

8. Моделирование металлических нанотрубок

Для доклада на конференции юному нанотехнологу Полуэктору понадобилась иллюстрация с вложенными друг в друга металлическими нанотрубками. Найти требуемые картинки в Интернете он не смог, поэтому Вам предстоит помочь Полуэктору и написать программу...

9. Золотое веретено

Если на двух противоположных гранях нанокластера золота в виде куба «нарастить» по квадратной пирамиде, то получим равностороннюю удлиненную квадратную бипирамиду – «золотое веретено». Выведите зависимость общего числа атомов N от числа атомов n , приходящегося на его ребро...

10. Закрытые углеродные нанотрубки

Закрытые углеродные нанотрубки (ЗУНТ) имеют на каждом торце «шапочку», представляющую собой половинку фуллерена. ЗУНТ так же, как и открытые УНТ (см. рис. в файле задачи), можно представить в виде выкройки на графеновом листе...

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 1. Практические нанотехнологии 18 века: опыт Бенджамина Франклина



*Клэпхэмский пруд, на котором через 200 лет был повторен опыт с маслом:
слева поверхность с волнами до того, как капнули масло,
справа – область штиля, образованная растекшейся каплей масла.*

О том, что пленка масла способна «сковывать» волнующуюся поверхность воды, знали еще в Древнем Риме. Однако первые количественные описания этого явления были сделаны Бенджамином Франклином. Ниже приведен текст из заметок Б. Франклина, которые он прочитал перед Лондонским королевским обществом в 1774 году:

«Часто бывая в Клэпхэме, там, где в общественном парке есть большой пруд, в один из дней я заметил на поверхности пруда сильное волнение от ветра, и, достав бутылочку с маслом¹, капнул немного масла в воду. Я увидел, как оно с удивительной быстротой растекается по поверхности, однако эффекта сглаживания волн это не произвело, поскольку я сначала испробовал масло там, где были наибольшие волны – с подветренной стороны пруда – и ветер сдул мое масло обратно к берегу. Тогда я перешел на наветренную сторону, откуда волны начинали формироваться, и там вылитое на воду масло, несмотря на то, что его было не более чайной ложки, произвело мгновенное затишье на площадке в несколько ярдов². Поразительно, как масло распространялось по поверхности, пока, постепенно растекаясь, не достигло подветренного берега, делая всю эту часть пруда (примерно в пол-акра³ площадью) гладкой как зеркало!»

Франклин первым отметил, что капля масла на воде может растекаться по такой большой площади, что пленка становится невидимой глазом, и только область «сковывания» волн указывает на ее границы. Позже, в конце 19-го века лорд Рэлей продолжил опыты Бенджамина Франклина с маслом и предположил, что минимальная толщина пленки ограничена размером молекул, из которых состоит масло.

1. Оцените минимальную толщину пленки масла, которую получил Б. Франклин, если объем английской чайной ложки составляет 3,5 мл. **(2,5 балла)**
2. Оцените массу одной молекулы (в граммах), из которых состоит масло, считая, что: толщина образовавшейся пленки равна высоте молекул, все молекулы имеют форму куба и занимают один и тот же объем как в масле, так и в пленке. **(3,5 балла)**

¹Оливковое масло, плотность 0,91 кг/л.

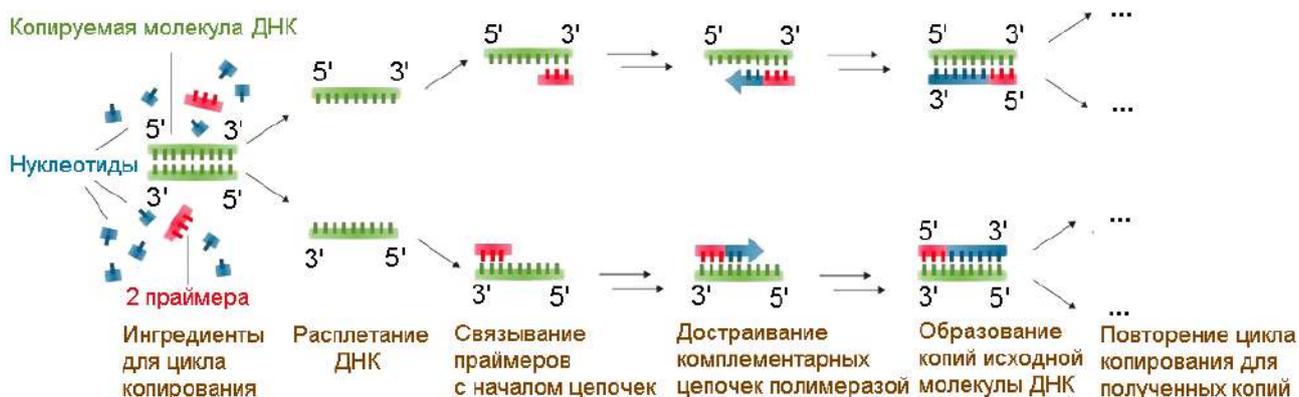
²Ярд – британская и американская мера длины, считать равным 91 см.

³Акр – мера площади, применяемая в ряде стран с английской системой мер, один акр равен 4840 квадратным ярдам.

Всего – 6 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 2. Полимеразная цепная реакция



Полимеразная цепная реакция (ПЦР) является одним из важнейших методов молекулярной биологии, который позволяет многократно «скопировать» исходную молекулу или фрагмент ДНК, и широко применяется как в научных исследованиях, так и в медицине и криминалистике.

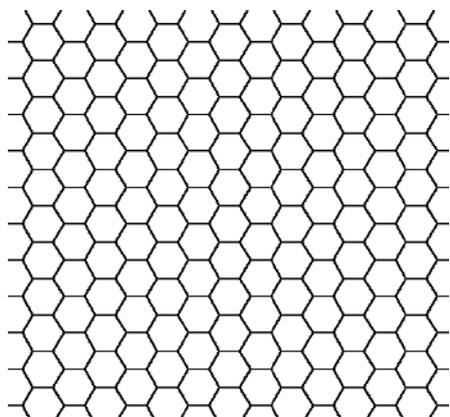
Рассмотрим такую последовательность циклов копирования (см. рис.) N_D исходных молекул ДНК¹, что:

- в каждом цикле для каждой молекулы происходит полное формирование ее копий;
- все используемые праймеры одинаковы;
- до начала копирования число праймеров N_p превышает N_D в 2050 раз;
- в ходе копирования праймеры расходуются полностью.

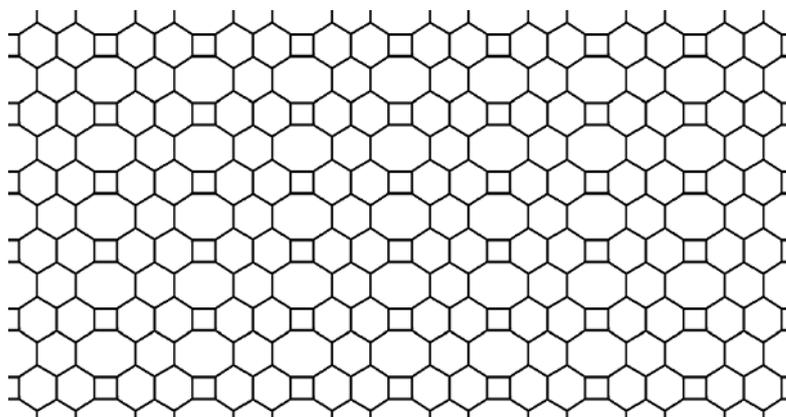
1. Во сколько раз после проведения ПЦР увеличится число исходных молекул ДНК? Какое количество циклов копирования (n) при этом пройдет? **(4 балла)**
2. В каком по счету цикле копирования впервые образуются молекулы ДНК, у которых обе цепочки не были выращены по цепочкам исходных копируемых молекул ДНК? Рассчитайте количество таких молекул ДНК (N_S), если изначально было $N_D = 2 \cdot 10^9$ исходных молекул ДНК. **(4 балла)**

¹ Молекула ДНК состоит всего из четырех букв-нуклеотидов: А, С, Г, Т. Буквы ДНК из одной цепочки способны связываться попарно ($A \Leftrightarrow T, G \Leftrightarrow C$) с буквами из противоположной цепочки, называемой комплементарной.

Всего – 8 баллов



а



б

Многим из вас знаком двумерный углерод – графен, представляющий собой шестиугольную сетку, в узлах которой находятся атомы углерода (рис. а). Большой интерес к этому материалу вызванный, в том числе, его уникальными электронными свойствами, подталкивает ученых всего мира к поиску новых форм двумерного углерода. На рисунке б представлена одна из таких структур, предсказанных при помощи моделирования, – net-Y.

1. Рассмотрите структуру net-Y. Из каких разных многоугольников она состоит? Найдите, посчитайте и опишите неэквивалентные (то есть, имеющие разное окружение):
 - многоугольники каждого типа;
 - узлы (атомы углерода);
 - ребра. **(4 балла)**
2. Выделите минимально возможную прямоугольную область – ячейку, – повторение которой позволяет полностью воспроизвести net-Y. Найдите число узлов и число многоугольников каждого типа, приходящееся на ячейку. **(2 балла)**
3. Во сколько раз лист net-Y легче/тяжелее листа графена такой же площади? **(2 балла)**

Считать, что:

- net-Y имеет плоскую структуру;
- четырех- и шестиугольники в net-Y являются правильными;
- длина всех ребер net-Y одинакова и равна длине ребра в графене.

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 4. Симметричные фуллерены: C_{20} , C_{2000} и C_{2020}

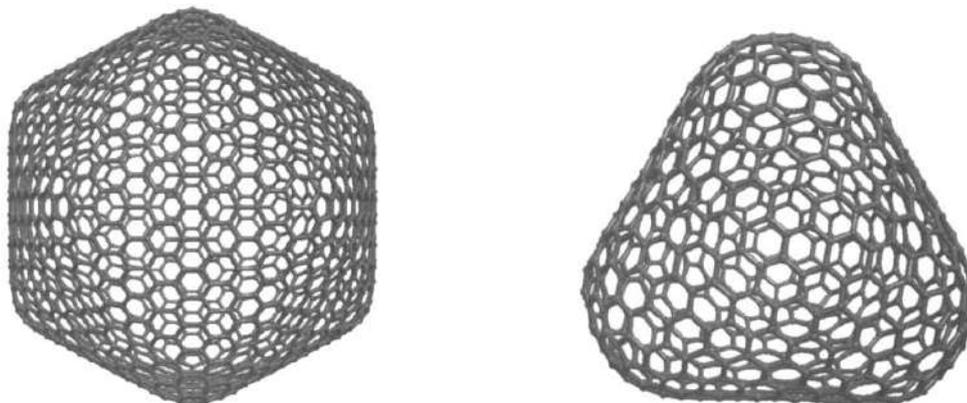


Рис. 1. Пример молекул гигантских икосаэдрического и тетраэдрического фуллеренов. Общее число атомов углерода в таких молекулах можно записать как $N_I = 20(n^2 + nm + m^2)$ и $N_T = 4(n^2 + nm + m^2) - 8$, соответственно (где n и m – некоторые целые неотрицательные числа).

Молекулы фуллеренов C_N представляют собой выпуклые многогранники, имеющие только пяти- и шестиугольные грани, в каждой вершине которых находится атом углерода и сходится по три ребра.

1. Для фуллерена C_{2020} рассчитайте число ребер, пяти- и шестиугольных граней, воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников. **(1 балл)**

Рассмотрим далее две симметрии фуллеренов – икосаэдрическую и тетраэдрическую (рис. 1).

2. Для каждой из них определите и выразите через общее число атомов (N_I и N_T , соответственно) диапазон возможных значений ($n \in [n_{\min}, n_{\max}]$, $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$). **(3 балла)**

Чтобы определить, может ли фуллерен C_N с общим числом атомов N принадлежать к заданному типу симметрии, надо записать $N(n, m)$ для этого типа и затем из диапазона ($n \in [n_{\min}, n_{\max}]$, $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$) подобрать решение полученного уравнения в целых числах.

3. Установите возможные типы симметрии для фуллеренов C_{20} , C_{2000} и C_{2020} и определите соответствующие им значения (n, m) . Есть ли среди них изомеры¹? Поясните ход решения. **(4 балла)**

¹Фуллерены с одинаковым общим числом атомов N , но разными значениями (n, m) называются изомерами. Пары типа $(5,1)$ и $(1,5)$ в рамках данной задачи изомерами не считаются.

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 5. От фуллеренов к боросференам

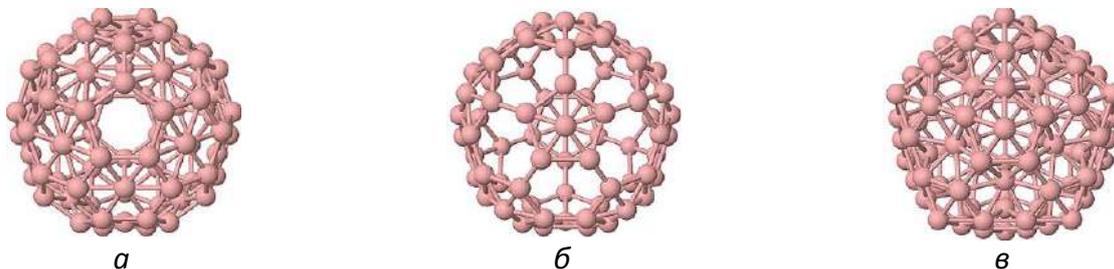


Рис. 1. Три способа преобразования структуры фуллерена в боросферен на примере бакибола C_{60} . Сначала атомы углерода заменяются на атомы бора, затем дополнительные атомы бора добавляются: а) только на шестиугольные грани (способ I), б) только на пятиугольные грани (способ II), в) и на шестиугольные, и на пятиугольные грани (способ III).

Предсказание в 1973 и открытие в 1985 году каркасных молекул, состоящих только из атомов углерода – фуллеренов – вдохновили ученых всего мира на поиски подобных структур и для других элементов, в том числе, при помощи методов компьютерного моделирования. Одним из таких элементов является бор. К 2007 году было доказано, что полный структурный аналог самого известного фуллерена, бакибола – B_{60} , – нестабилен. Однако, его стабильность можно повысить, если расположить в центрах граней дополнительные атомы бора (см. рис. 1).

1. Сколько пяти- и шестиугольных граней в структуре бакибола C_{60} ? **(1 балл)**
2. Сколько атомов бора в боросференах, полученных из бакибола способами I-III? **(1,5 балла)**
3. Для каждого из способов I-III запишите, каким образом число атомов бора N_B в молекуле боросферена связано с числом атомов углерода N_C в произвольном исходном фуллерене. **(1,5 балла)**
4. Найдите минимальное значение N_B для боросференов, которые можно получить способами I-III из трех самых маленьких фуллеренов – C_{20} , C_{24} , C_{26} . **(2 балла)**

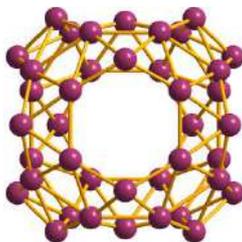


Рис. 2.

Структура каркаса экспериментально полученного в 2014 году боросферена B_{40} заметно отличается от предсказанной в 2007 году (см. рис. 2).

5. Преобразованиями I-III каких фуллеренов могла бы быть получена молекула, состоящая из 40 атомов бора? **(2 балла)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 6. Нанопружинка

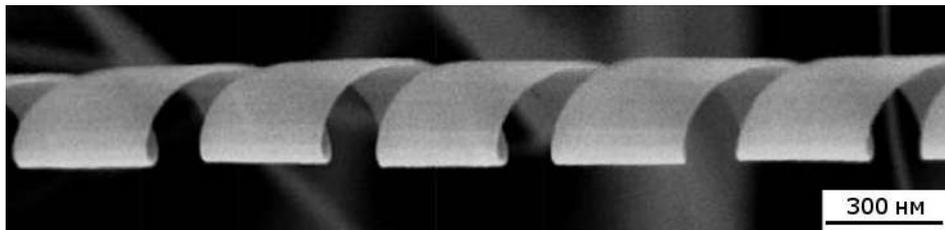
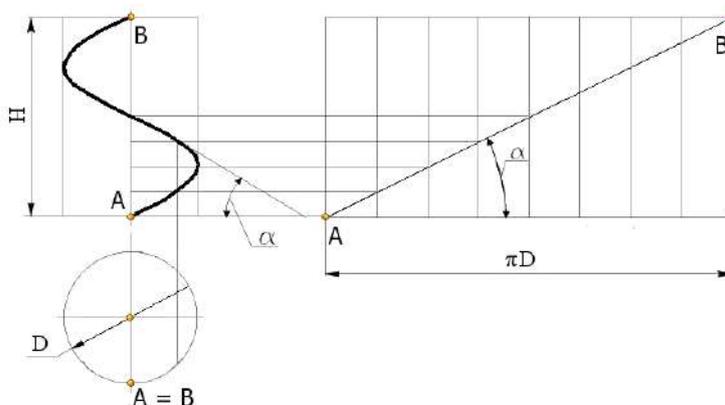


Рис. 1. Микрофотография свернувшейся в спираль наноленты из оксида цинка, полученная при помощи электронного сканирующего микроскопа.

1. По рисунку 1 оцените параметры¹ спирали: ширину формирующей ее ленты w , диаметр D и шаг H спирали. **(2 балла)**
2. Исходя из полученных данных, рассчитайте длину витка спирали L и угол ее закрутки α . Какова длина ленты $l_{\text{нб}}$, формирующей спираль, если последняя состоит из 10 витков? **(2 балла)**

В то же время, микрофотография не позволяет точно определить толщину ленты d .

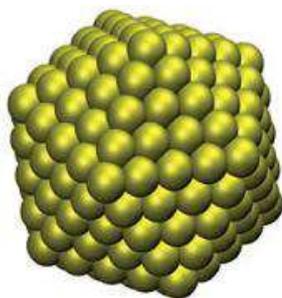
3. Рассчитайте d , если известно, что спираль с такими же, как и на микрофотографии, значениями w , D , H и длиной спирали $L_{\text{сп}} = 100$ мкм имеет массу $m = 7 \cdot 10^{-3}$ нг. Плотность оксида цинка составляет $\rho = 5,61$ г/см³. **(3 балла)**



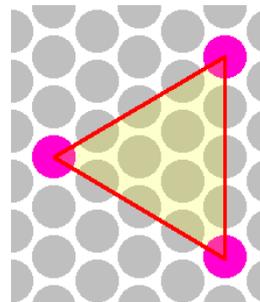
¹Рис .2. Схематическое изображение спирали: D – диаметр, H – шаг, α – угол подъема спирали. При разворачивании цилиндра, на который «намотана» спираль, она изобразится в виде прямой. Длина отрезка $AB = L$ называется длиной витка спирали.

Всего – 7 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 7. Строим полые кластеры из металла



а

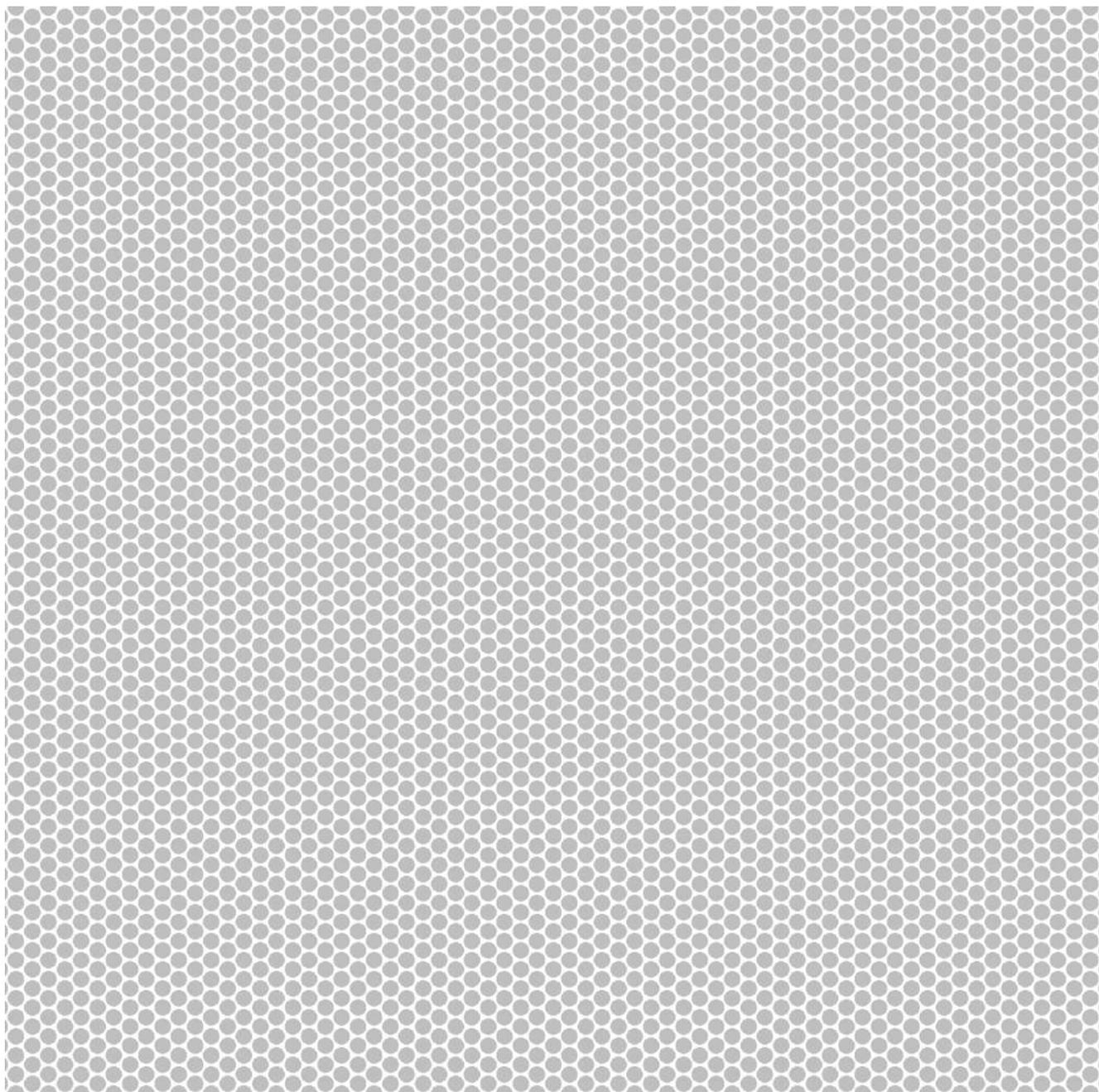


б

Рис. 1. а) Пример ПМК. б) Единичный треугольник «выкройки» – грань ПМК.

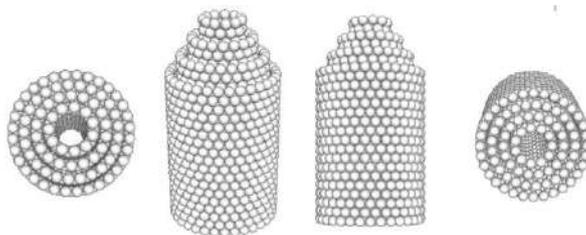
Рассмотрим полые металлические кластеры (ПМК) как металлическую оболочку толщиной в один атом, имеющую форму многогранника (рис. 1а), такого, что все его ребра равны между собой. Эту оболочку легко представить как вырезанную и склеенную «выкройку» из листа атомов металла, составленную из равносторонних треугольников (рис. 1б). При этом в местах склейки вершин «выкройки» (отмечены на единичном треугольнике розовым цветом) атом металла меняет число соседей в зависимости от того, сколько треугольных фрагментов сходится в вершине соответствующего многогранника.

1. Сколько соседей могут иметь атомы металла, расположенные в местах склейки единичных треугольников «выкройки» (то есть, сколько типов вершин могут иметь многогранники ПМК)? **(1 балл)** Какие еще правильные многоугольники могут быть гранями ПМК? **(1 балл)**
2. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, найдите и опишите (указав число вершин, ребер и граней) все многогранники, гранями которых являются треугольники, а вершины относятся не более чем к двум типам одновременно. **(6 баллов)**
3. Какие из этих многогранников можно построить из правильных треугольников, а какие – нет? Для ответа на вопрос воспользуйтесь схемой листа из атомов металла, приведенной в конце задачи, и нарисуйте «выкройку» из единичных треугольников (рис. 1б) для всех возможных многогранников. **(6 баллов)**



Всего – 14 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 8. Моделирование металлических нанотрубок



Для доклада на конференции юному нанотехнологу Полуэзку понадобилась иллюстрация с вложенными друг в друга металлическими нанотрубками. Найти требуемые картинки в Интернете он не смог, поэтому Вам предстоит помочь Полуэзку и написать программу, которая будет создавать файл с заданной структурой, затем, открыв файл в любом подходящем просмотрщике химических структур, получить изображение структуры.

Для начала рассмотрим нанотрубку, сложенную из k кольцевых слоев, каждый из которых содержит n касающихся друг друга атомов металла *диаметром* a .

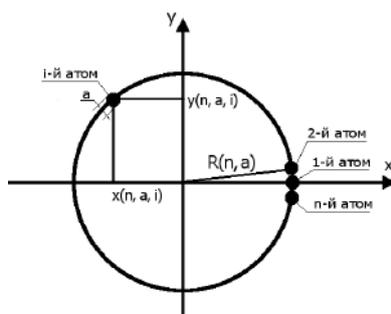


Рис. 1. Принцип расположения атомов первого кольцевого слоя относительно декартовой системы координат, $z = 0$.

1. Для одного слоя нанотрубки запишите:

- 1.1. радиус окружности $R(n, a)$, проходящей через центры всех атомов слоя; **(0,5 балла)**
- 1.2. координаты i -го ($1 \leq i \leq n$) атома в слое нанотрубки: $x(n, a, i)$ и $y(n, a, i)$. **(1 балл)**

2. Для последовательности слоев, прилегающих друг другу плотнейшим образом:

- 2.1. запишите полярный угол $\phi(n)$, отвечающий взаимному расположению i -х атомов двух последовательно идущих кольцевых слоев нанотрубки; **(0,5 балла)**
- 2.2. оцените расстояние $d(a)$ между плоскостями, проходящими через центры атомов двух последовательно идущих кольцевых слоев нанотрубки. **(1 балл)**

3. Составьте алгоритм построения координат всех атомов для трехслойной металлической трубки со следующими параметрами составляющих ее трубок:
- число атомов в слое – n_1, n_2, n_3 ,
 - количество слоев в трубке – k_1, k_2, k_3 . **(2 балла)**

На любом языке программирования напишите программу, создающую по такому алгоритму .xyz файл (см. рис. 2). Исходный текст программы приложите к решению. **(7 баллов)**

Считать, что центры первых слоев всех трех трубок находятся в начале координат.

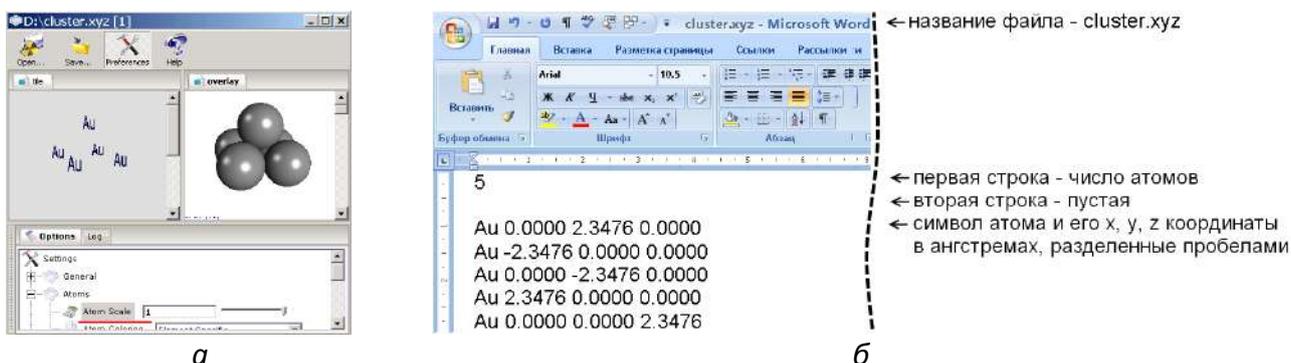


Рис. 2. Справа показано содержимое простого xyz файла (открытого в текстовом редакторе Microsoft Word), задающего расположение 5 атомов золота (Au) в вершинах квадратной пирамиды. Слева – этот же файл, открытый в просмотрщике химических структур PubChem 3D Viewer <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/pc3d/> (чтобы атомы касались друг друга, их масштаб установлен в настройках просмотра как «1»).

4. При помощи написанной вами программы получите .xyz файл для трех вложенных друг в друга золотых нанотрубок, имеющих параметры:
- $n_1 = 24, n_2 = 17, n_3 = 10$,
 - $k_1 = 10, k_2 = 12, k_3 = 14$.

Приложите к решению фотографию или изображение визуализации полученной модели в любом просмотрщике химических структур. **(3 балла)**

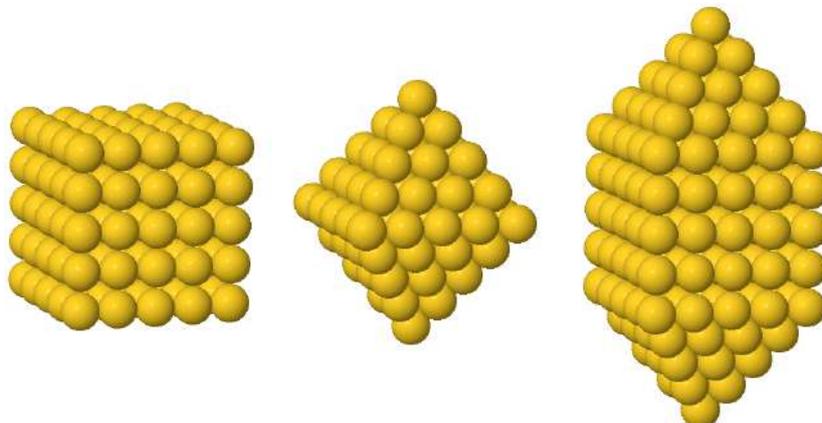
Диаметр атома золота составляет $a = 3,32$ ангстрема.

Всего – 15 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 9. Золотое веретено



Если на двух противоположных гранях нанокластера золота в виде куба «нарастить» по квадратной пирамиде, то получим равносоставленную удлинненную квадратную бипирамиду – «золотое веретено».

1. Выведите зависимость общего числа атомов **N** от числа атомов **n**, приходящегося на его ребро, для нанокластеров в форме: а) куба, б) октаэдра, в) «золотого веретена». **(4 балла)**
2. Рассчитайте **N** и радиус сферы, описанной вокруг нанокластера, для: а) куба (**n = 7**), б) октаэдра (**n = 8**), в) «золотого веретена» (**n = 6**). Радиус атома золота считать равным $r = 0,144$ нм. **(3 балла)**
3. Сколько типов атомов, отличающихся друг от друга числом ближайших соседей (координационным числом, КЧ), присутствует на поверхности нанокластеров в форме: а) куба, б) октаэдра, в) «золотого веретена»? Опишите их расположение. **(4 балла)**
4. Сколько типов атомов, отличающихся друг от друга КЧ, присутствует в объеме нанокластеров в форме: а) куба, б) октаэдра, в) «золотого веретена»? Рассчитайте КЧ для каждого из типов и поясните, где именно в рассматриваемых нанокластерах они расположены. **(3 балла)**

Подсказка: и для атомов на поверхности, и для атомов в объеме нанокластера не забудьте рассмотреть касания не только внутри одного слоя, но и с атомами соседних слоев.

Сумма квадратов последовательности натуральных чисел $1, 2, \dots, n$: $\sum_{m=1}^n m^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Всего – 14 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 10. Закрытые углеродные нанотрубки

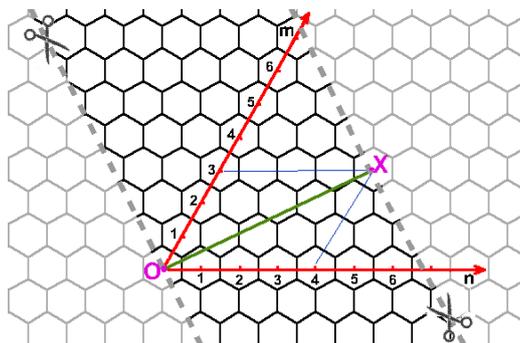


Рис. 1. Любую пару шестиугольников на графеновом листе можно описать двумя натуральными числами, являющимися координатами центра одного из них относительно центра другого в косоугольной системе координат. Развертка открытой углеродной нанотрубки (УНТ) задается с помощью пары чисел (n, m) , называемых индексами хиральности. Для получения УНТ полоску из графенового листа необходимо вырезать по линиям отреза, перпендикулярным OX , свернуть и «склеить» ее края в трубку. На рисунке приведен пример развертки УНТ $(4, 3)$.

Закрытые углеродные нанотрубки (ЗУНТ) имеют на каждом торце «шапочку», представляющую собой половинку фуллерена. ЗУНТ так же, как и открытые УНТ (рис. 1), можно представить в виде выкройки на графеновом листе.

Рассмотрим половинку ЗУНТ, у которой в центре «шапочки» находится пятиугольник (ЗУНТ-5) (рис. 2а, отмечен на выкройке темно-серым цветом), а еще пять пятиугольников расположены симметрично относительно него (рис. 2а, отмечены на выкройке светло-зеленым цветом). Положение этих пятиугольников относительно центрального можно задать парой чисел (x, y) (рис. 2б) – индексами хиральности «шапочки» ЗУНТ-5.

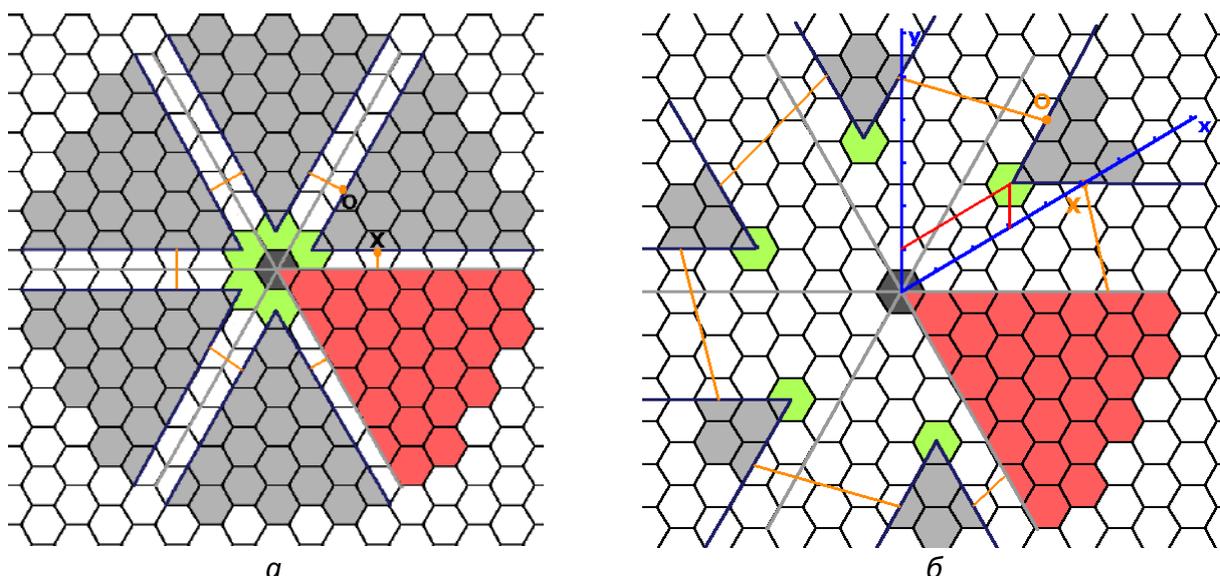


Рис. 2. Примеры выкроек половинок ЗУНТ-5.

а) Минимальная ЗУНТ-5. Удаление красного сектора шириной 60° формирует торцевой (центральный) пятиугольник. В свою очередь, удаление пяти серых секторов производится так, что линии отреза параллельны светло-серым линиям – границам пяти симметричных секторов. Оранжевая линия здесь – это отрезок, задающий ЗУНТ-5 (OX , рис. 1). б) ЗУНТ-5 с индексами хиральности «шапочки» $(3, 1)$.

1. Запишите индексы хиральности (n , m) для нанотрубок, выкройки которых представлены на рис. 2. К каким типам¹ они относятся? Запишите общий вид зависимости (n , m) ЗУНТ-5 от индексов хиральности ее «шапочки» (x , y)? **(4 балла)**
2. Выведите в общем виде зависимость числа атомов N в «шапочке» ЗУНТ-5 от (x , y). **(3 балла)** Границей «шапочки» считать линию, проходящую через центры пяти пятиугольников.
3. На сетке шестиугольников, приведенной в конце условия, постройте выкройку ЗУНТ-5 с «шапочкой» (3, 5) и рассчитайте ее диаметр². **(2 балла)** Воспользовавшись циркулем и линейкой, найдите индексы хиральности (x , y) для «шапочек», дающих ЗУНТ-5 того же диаметра. **(3 балла)**

¹Различают следующие типы нанотрубок:

- зубчатые, $n = m$;
- зигзагообразные, $m = 0$ или $n = 0$;
- хиральные нанотрубки (все остальные значения n и m).

²Атомы углерода считать точечными, длину связи С–С равной $a = 0,14$ нм.

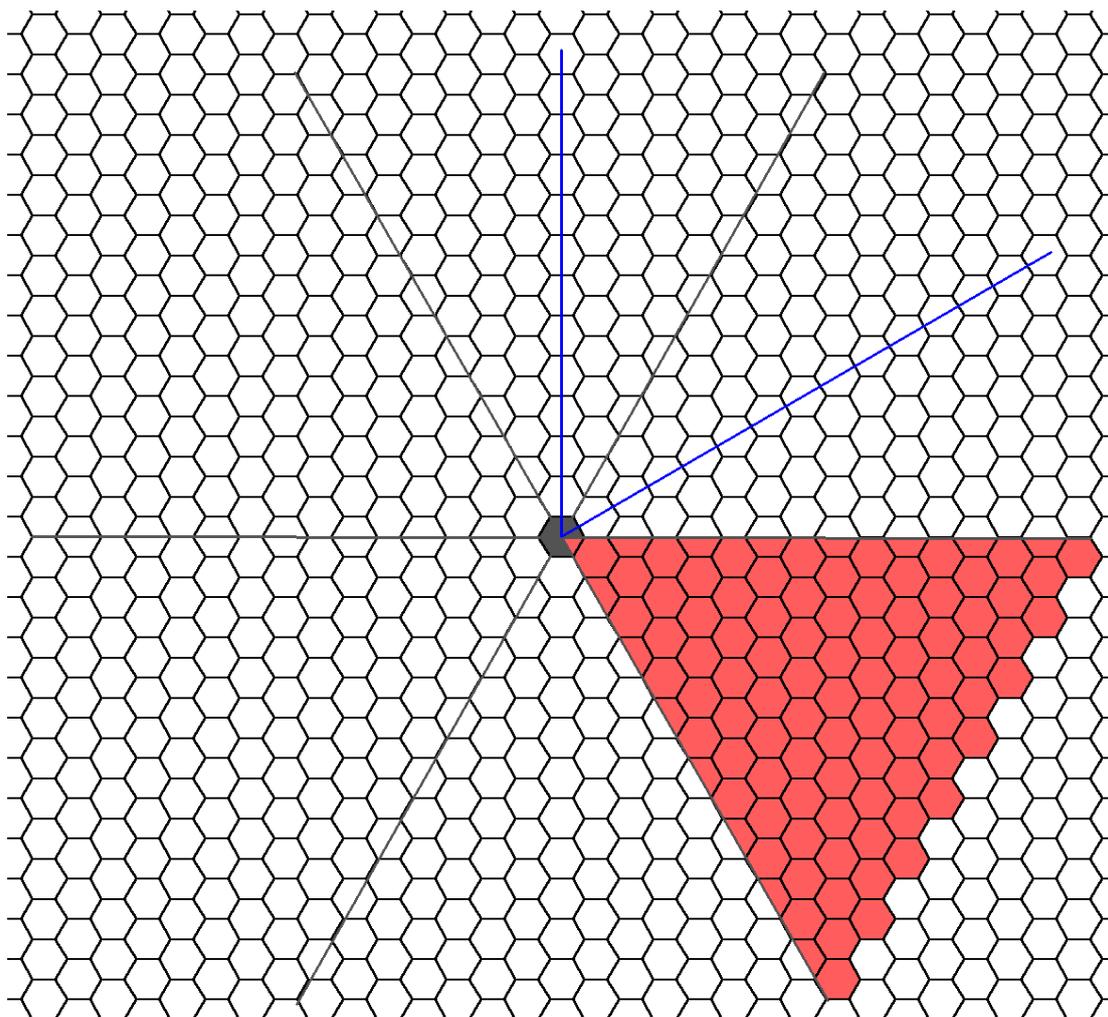


Рис. 3. Сетка шестиугольников для построения выкроек.

Всего – 12 баллов