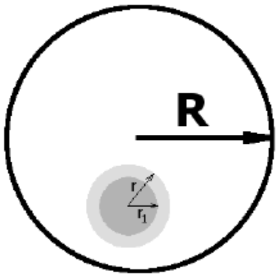
Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Задания. Вариант III

Задача 1. Нанореакторы и наночастицы (8 баллов)

Синтез в мицеллах позволяет эффективно контролировать размер наночастиц, ограничивая количество реагента.

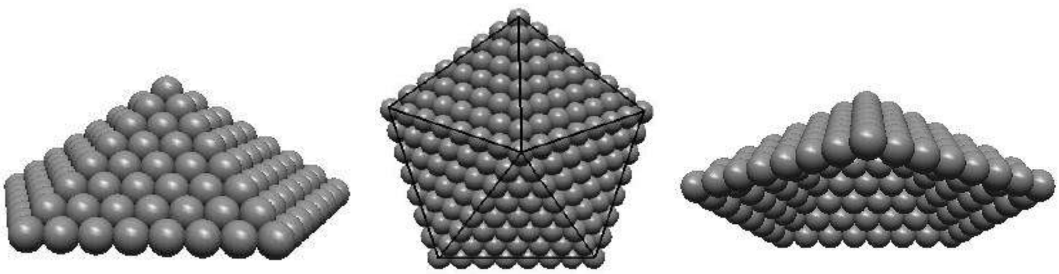
Раствор, 1 литр которого содержит c_1 граммов серебра и c_2 граммов меди, был включен во внутреннюю полость мицелл радиуса **R** = 30 нм. Затем, в ходе химической реакции, в этих мицеллах образовались сферические наночастицы, сердцевина которых состоит из серебра, а оболочка – из меди (см. рис).



1. Рассчитайте c_1 (г/л), если радиус серебряной сердцевины составляет r_1 = 3 нм. **(4 балла)**
2. Рассчитайте итоговый радиус наночастиц **r** (нм), если c_2 = 12 г/л. **(4 балла)**

Плотность серебра считать равной ρ_1 = 11 г/см^3, плотность меди – ρ_2 = 9 г/см^3.

Задача 2. Нанотарелка (8 баллов)



Нанокластер из золота имеет форму пятиугольной тарелки с ребром, состоящим из **n** атомов (на рисунке показан *пример* для **n** = 8).

1. Рассчитайте, сколько атомов золота содержит нанотарелка, если **n** = 15. **(4 балла)**

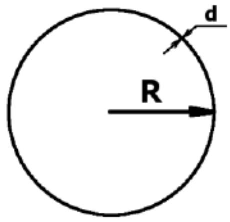
Если взять один атом золота и последовательного «накрыть» его нанотарелками, на ребро которых приходится 2, 3, 4 … **n** атомов золота, то получится нанокластер в форме пятиугольной бипирамиды с ребром, состоящим из **n** атомов.

2. Сколько атомов золота содержит такой нанокластер, если **n** = 15? **(4 балла)**

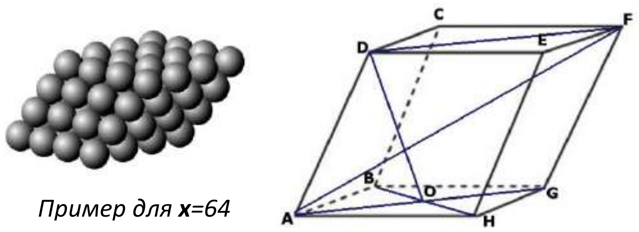
Задача 3. Получение липосом (8 баллов)

Липосомы – сферические «пузырьки», заполненные жидкостью, стенки которых состоят из липидов.

В стакан с водой объемом **V** = 50 мл добавили $\mathbf{V_0}$ = 0,05 мл некоторого липида, затем обработали полученную смесь ультразвуком с образованием липосом. Найдите их радиус **R** (нм), если толщина их стенок составляет **d** = 1 нм (рис.), а расстояние между центрами липосом равно **L** = 169 нм. Считать, что центры липосом в растворе расположены друг относительно друга как вершины куба.



Задача 4. Ромбоэдр (8 баллов)



*Пример для **x**=64*

Ромбоэдрический кластер «построен» из атомов как показано на рисунке. Рассчитайте размер кластера Cu_{343} как диаметр описанной вокруг него сферы, если радиус атома меди равен **r** = 0,128 нм.

Задача 5. Разбираем нанотрубку (8 баллов)

Углеродную нанотрубку (УНТ) можно представить сложенной из зигзагообразных цепочек углеродных атомов: как в виде поперечных «колец», так и в виде опоясывающих трубку продольных «спиралей» (рис. 1).

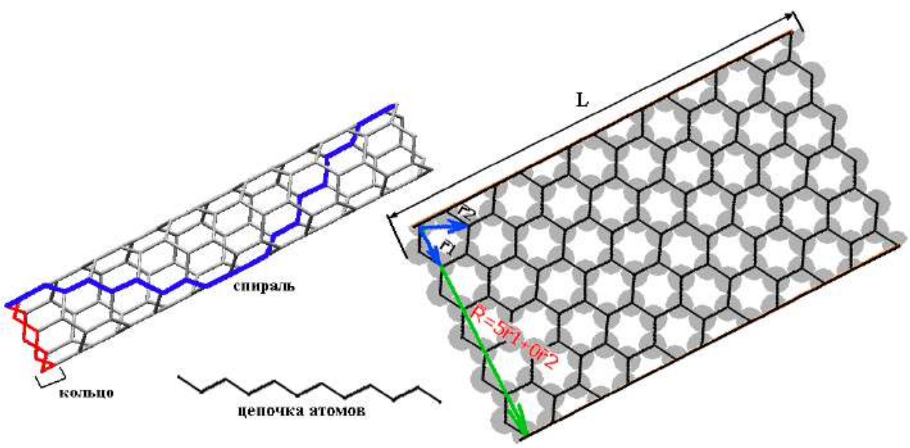


*Рис. 1. УНТ с индексами хиральности (**n**, **m**) можно представить как фрагмент графенового листа, ограниченный параллельными линиями и свернутый вдоль направления радиус-вектора $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$. Показан пример зигзагообразной УНТ с индексами хиральности (5,0) и ее развертки.*

Для УНТ с индексами хиральности (15, 0) и длиной **L** = 5,25 нм найдите число:

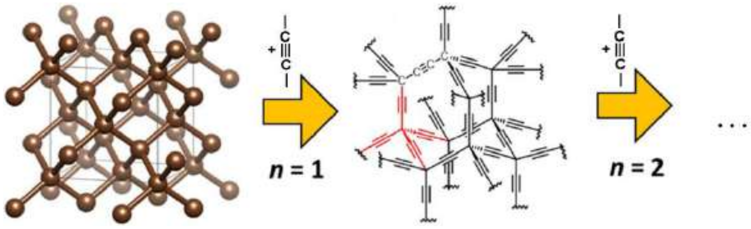
1) поперечных «колец», на которые можно разделить УНТ; **(2,5 балла)**

2) атомов углерода в трубке; **(1 балл)**

3) продольных «спиралей», на которые можно разделить УНТ (**1 балл**). Какова при этом длина одной спирали? **(3,5 балла)**

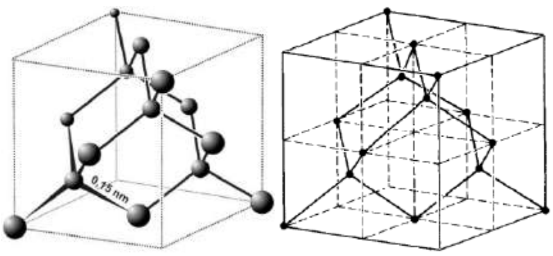
Радиус атома углерода считать равным **b** = 0,07 нм.

Задача 6. n-Диамондин – ажурный углеродный материал (20 баллов)

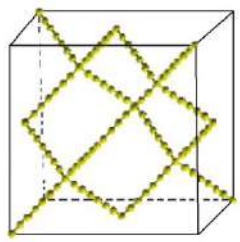


Каждый атом углерода в структуре алмаза связан с четырьмя ближайшими соседями, которые расположены в вершинах тетраэдра. При этом элементарная ячейка алмаза, повторением в пространстве которой получается объемный кристалл, имеет форму куба (рис. а).

Строение алмаза (формально являющегося 0-диамондином) повторяют его нанопористые аналоги – **n**-диамондины, структуры которых получаются, если между всеми связанными атомами углерода алмаза поместить дополнительно **n** пар атомов углерода – цепочку –$(C{\equiv}C)_n$– (рис. б).



а



б

*Рис. Структура элементарной ячейки: а) алмаза, б) 3-диамондина (**n** = 3).*

1. Определите, сколько атомов углерода $\mathbf{N_0}$ и связей С–С приходится на одну элементарную ячейку алмаза. **(2 балла)** Учтите, что лежащие в вершинах и на гранях куба атомы принадлежат одновременно нескольким ячейкам.

2. Рассчитайте, сколько атомов углерода $\mathbf{N_n}$ приходится на ячейку **n**-диамондина. **(2 балла)**

3. Чему равен объем элементарной ячейки рис. (а), если расстояние между соседними тетраэдрическими узлами в ней равно $\boldsymbol{l}$? **(4 балла)**

4. Выведите формулу зависимости соотношения плотностей алмаза и **n**-диамондина ($\boldsymbol{\rho_0/\rho_n}$) от **n**. **(3 балла)** Рассчитайте это соотношение для **n** = 3. **(1 балл)**

Благодаря наличию большого числа наноразмерных пустот **n**-диамондины можно рассматривать как «наногубку». Одним из перспективных направлений применения подобных материалов является сбор разлившейся нефти.

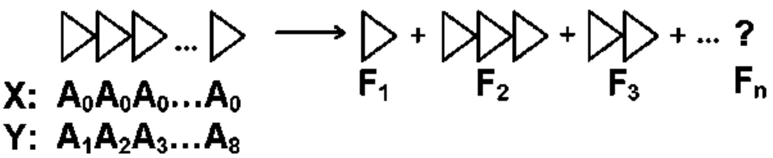
5. Оцените объемную долю пустот в 3-диамондине. **(3 балла)** Атомы углерода считать шарами.

6. Рассчитайте, во сколько раз масса поглощенной нефти превышает массу 3-диамондина, если нефть может занимать не менее 80% свободного объема в порах. **(5 баллов)**

Считать, что:

- расстояние между любыми соседними атомами углерода равно **a** = 0,14 нм,
- радиус атома углерода равен 0,5**a** нм,
- масса атома углерода равна $\mathbf{M}_C = 2\cdot10^{-23}$ г,
- плотность нефти составляет $\boldsymbol{\rho}_н = 0{,}9$ г/см^3.

Задача 7. Фрагментация полипептидов (20 баллов)



Рассмотрим два полипептида[1*]: **X**, который состоит из **m** одинаковых аминокислот, и **Y**, состоящий из 8 разных аминокислот.

В некоторых условиях происходит фрагментация полипептидов, при которой реализуются все возможные варианты разбиения молекул полипептидов на фрагменты.

[*] Полипептид – полимерная молекула, последовательно образованная из аминокислот, имеет начало и конец. Фрагментами полипептида являются любые последовательности аминокислот, входящие в состав исходного полипептида, кроме него самого.

1. Найдите **m**, если фрагментация полипептида **X** приводит к $\mathbf{N_{max}}$ = 9 разным фрагментам. **(1 балл)**

2. Рассчитайте $\mathbf{N_{max}}$ для полипептида **Y**. **(3 балла)**

В иных условиях, при фрагментации в каждой молекуле полипептида случайным образом разрываются **k** связей между аминокислотами.

Для полипептида **X** и **k** = 2:

3. Найдите общее число возможных способов (**M**) фрагментации молекулы в описанных условиях. **(3 балла)**

4. Сколько разных фрагментов (**N**) получится, если реализовать все эти способы на **M** молекулах полипептида **X**? **(2 балла)** Свой ответ обоснуйте.

5. Рассчитайте, в каком соотношении будут получаться фрагменты $\mathbf{F_1}$…$\mathbf{F_N}$ при такой реализации фрагментации полипептида **X**. **(6 баллов)**

Для полипептида **Y** при варьировании **k** от 1 до $\mathbf{k_{max}}$:

6. Найдите **N** для каждого значения **k**. **(4 балла)**

7. При каком значении **k** число фрагментов полипептида **Y** максимально? **(1 балл)**

Задача 8. Тетраэдрические фуллерены (20 баллов)

Решая задачи заочного тура, вы познакомились с одним из семейств фуллеренов, имеющих симметрию тетраэдра (семейство I, рис. 1а). Кроме него можно выделить еще два семейства тетраэдрических **T** фуллеренов – II и III (рис. 1б и 1в), – в которых пятиугольники разбиты на группы по три, имеющие одну общую вершину. Также существуют фуллерены, в которых пятиугольники лежат в вершинах усеченного тетраэдра **TT** (семейства IV и V, рис. 1г и 1д).

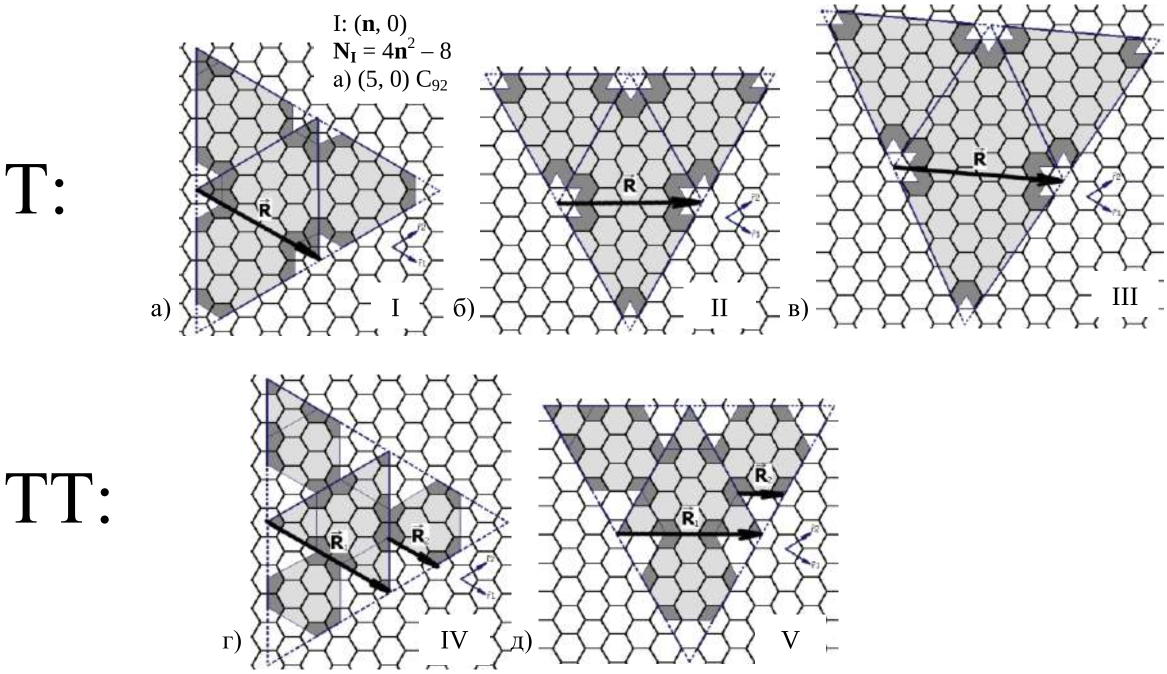


Рис. 1. Примеры выкроек тетраэдрических ***T*** *(семейства I-III) и усеченных тетраэдрических* ***TT*** *(семейства IV-V) фуллеренов* $C_{N_{I\text{-}V}}$ *(****N*** *– число атомов в молекулах) на графеновой плоскости. Вырезаемая область для наглядности затенена; области выкройки, складывающиеся в 12 пятиугольников, отмечены более темным цветом. Отрезок, соединяющий центры шестиугольников на графеновой плоскости, можно задать как сумму единичных векторов* $\vec{r}_1$ *и* $\vec{r}_2$*, взятых с коэффициентами (****n, m****):* $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$ *,* $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{N}_0$ *– индексы хиральности.*

1. Для фуллеренов, приведенных на рисунках 1б-д, определите значение индексов хиральности для задающих их векторов. **(2 балла)**

2. Для семейств I и IV края развертки располагаются перпендикулярно связям C–C, а для семейств II и V – вдоль них. Какие ограничения накладываются при этом на индексы хиральности, задающие эти семейства? **(1 балл)**

3. Выведите формулу, описывающую зависимость числа атомов **N** (см. рис.):

   а) от (**n**, **m**) для произвольного тетраэдрического фуллерена **T** (**2 балла**);
   б) от (**n₁**, **m₁**) и (**n₂**, **m₂**) для усеченного тетраэдрического фуллерена **TT** (**2 балла**).

4. Для каких значений (**n₂**, **m₂**) семейство фуллеренов IV превращается в семейство II, а семейство V в III? **(1 балл)**

5. Рассчитайте числа атомов $\mathbf{N_{II}}$ – $\mathbf{N_{V}}$ для приведенных на рисунках 1б-д фуллеренов. **(3 балла)**

6. Выведите формулу общего числа (**k**) фуллеренов семейства IV, которые можно получить путем усечения некоторого фуллерена (**n**, 0) I семейства? **(3 балла)**

7. Найдите индексы хиральности для первых пар фуллеренов, имеющих равное число атомов и принадлежащих к:

   а) семействам I и II (**2 балла**);
   б) семействам I и III (**4 балла**). Свой ответ обоснуйте.

Вспомогательная информация:

Теорема Эйлера для выпуклого многогранника: **V** – **E** + **F** = 2, где **V**, **E**, **F** – это, соответственно, число вершин, ребер и граней многогранника.

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2$, $\sqrt{7} \approx 2{,}7$, $\sqrt{11} \approx 3{,}3$, $\sqrt{13} \approx 3{,}6$, $\sqrt{17} \approx 4{,}1$.

При расчетах **π** считать равным 3,1.

Формула суммы квадратов последовательности натуральных чисел 1, 2, …, **n**:

$$\sum_{m=1}^{m=n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$