



## Математика для школьников

Математика

Категория участников: школьники 7-11 классов

Блок теоретических заданий по **математике для школьников 7-11 классов** включает задачи разной сложности. Для повышения вероятности прохождения на очный тур Вам желательно решить задачи не только по математике, но и по физике, биологии, химии, чтобы набрать больше баллов. Все прошедшие на очный тур обязательно решают задачи по всем четырём предметам.

### Задания

#### 1. G-квадруплексы

Единичные нити ДНК\* с определенным расположением гуанина **G** способны самопроизвольно сворачиваться в четырёхцепочечные спирали – обладающие повышенной устойчивостью G-квадруплексы, которые участвуют во многих жизненно важных процессах...

#### 2. Тетраэдры и пирамиды

Два школьника получили одинаковые наборы шариков и задание: сложить из них модели тетраэдрических и пирамидальных нанокластеров так, чтобы ни одного лишнего шарика не осталось. Оба школьника с заданием справились...

#### 3. Рост дендримера

Рост дендримера – макромолекулы с симметричной древообразной структурой с регулярными ветвлениями – происходит поэтапно, поколение за поколением. Число мономерных звеньев, присоединившихся к звену предыдущего поколения, называют коэффициентом ветвления **k**...

#### 4. Пористый материал

Из некоторого вещества с истинной плотностью  $\rho = 3 \text{ г/см}^3$  получили пористый материал

**М** с удельной площадью поверхности пор  $S_{уд} = 500 \text{ м}^2/\text{г}$ . Известно, что все поры материала **М** имеют форму цилиндров радиуса **r**, оси этих цилиндров параллельны...

## 5. Полые металлические кластеры

Поверхность полого высоко симметричного металлического кластера (ПМК)  $M_{N(n,m)}$  можно представить в виде «выкройки» из плотноупакованного листа атомов металла **М**. Такая «выкройка» состоит из 20 одинаковых равносторонних треугольников...

## 6. ДНК для хранения информации: от теории к практике

Молекулы ДНК обладают одной из самых больших плотностей хранения информации. Недавно группа ученых предложила способ кодирования информации с использованием адресной записи в короткие последовательности нуклеотидов...

## 7. Золотые октаэдры

Атомы золота могут образовывать кластеры в форме: а) октаэдра **О** с ребром **n** атомов; б) правильного усеченного октаэдра **ТО** с ребром **m** атомов и общим числом атомов. Сколько атомов золота приходится на каждую грань октаэдрического кластера с ребром в **n** атомов?..

## 8. Наноторы из нанотрубок: от больших к самому маленькому

Если вырезанную из листа графена фигуру свернуть и затем склеить по горизонтальному «шву» как показано на рис., то мы получим углеродную нанотрубку. Сгибая эту трубку и склеивая ее торцы, мы получаем углеродный нанотор...

## 9. Фуллерены

Молекулы фуллеренов представляют собой выпуклые многогранники, составленные из атомов углерода\* и имеющие только пяти- и шестиугольные грани. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников...

## 10. Изомерия икосаэдрических фуллеренов

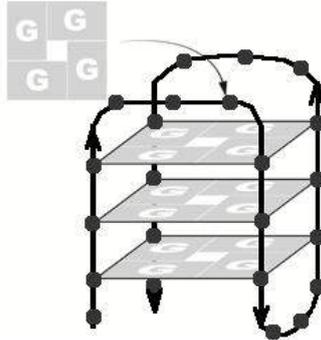
Любой икосаэдрический фуллерен можно представить в виде «выкройки» на графеновой плоскости. Общее число атомов при этом определяется по формуле. Изомерными называются молекулы икосаэдрических фуллеренов, имеющие одинаковое число атомов **N**...



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 1. G-квадруплексы

Единичные нити ДНК\* с определенным расположением гуанина **G** способны самопроизвольно сворачиваться в четырёхцепочечные спирали – обладающие повышенной устойчивостью G-квадруплексы, которые участвуют во многих жизненно важных процессах и широко представлены во всех известных геномах. При этом четыре нуклеотида **G** из разных цепей образуют плоскую структуру, называемую G-квартетом (см. рис.).



1. Найдите вероятность того, что случайная последовательность ДНК фиксированной длины является G-квадруплексом с взаимным расположением G-квартетов и петель как на рисунке. Считать, что:
  - первый и последний символы в G-квадруплексе не являются гуанином;
  - все три петли G-квадруплекса а) могут содержать **G (2 балла)** и б) не содержат **G. (2 балла)**
2. Для случая (б) рассчитайте долю **G** в общем числе нуклеотидов нити ДНК, отвечающей G-квадруплексу. **(1 балл)** Во сколько раз она отличается от доли нуклеотидов **G** для случайной последовательности ДНК? **(1 балл)**

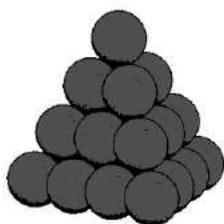
\* Наследственную информацию в ДНК-последовательности можно рассматривать как строку текста, записанную четырьмя буквами – **A, G, T, C**, которые отвечают четырем нуклеотидам.

**Всего – 6 баллов**



**Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)**

**Задача 2. Тетраэдры и пирамиды**



*a*



*б*

$$Td_n = (n^3 + 3n^2 + 2n) / 6$$

$$P_n = (2n^3 + 3n^2 + n) / 6$$

*в*

*Рис. Примеры моделей а) тетраэдрического  $Td_4$  и б) пирамидального  $P_4$  нанокластеров с длиной ребра  $n = 4$  атома. в) Зависимости общего числа атомов в нанокластерах от длин их ребер.*

Два школьника получили одинаковые наборы шариков и задание: сложить из них модели тетраэдрических и пирамидальных нанокластеров так, чтобы ни одного лишнего шарика не осталось.

Оба школьника с заданием справились. Первый построил пять моделей нанокластеров: тетраэдрическую  $Td_7$  и пирамидальные –  $P_x$ , две  $P_{2x}$  и  $P_{4x}$ . Второй школьник сложил восемь моделей тетраэдрических нанокластеров: пять  $Td_x$ , одну  $Td_{x+7}$  и две  $Td_{4x}$ .

Сколько шариков было в наборе?

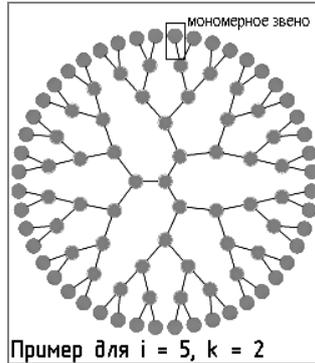
**Всего – 5 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 3. Рост дендримера

Рост дендримера – макромолекулы с симметричной древообразной структурой с регулярными ветвлениями – происходит поэтапно, поколение за поколением. Число мономерных звеньев, присоединившихся к звену предыдущего поколения, называют коэффициентом ветвления  $k$ .



1. Найдите максимальный размер молекулы дендримера (радиус  $R$ , число поколений  $i'$ ), схема ветвления которого все еще отвечает представленной на рисунке. **(3 балла)**
2. По какой причине дальнейший рост молекулы приведет к изменению величины  $k$ ? **(1,5 балла)** Рассчитайте  $k$  для поколения  $i' + 1$ . **(1 балл)**
3. Выведите и постройте в виде графика общий вид зависимости  $k(i)$ . **(2 балла)** Какова величина  $k$  для бесконечно больших молекул дендримера? **(1,5 балла)**

Примите, что:

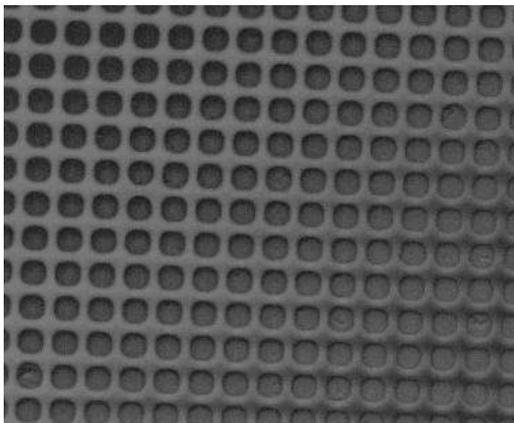
- в любом поколении молекула дендримера имеет форму сферы;
- радиус дендримера с каждым поколением увеличивается на  $l = 1$  нм;
- радиус области, занимаемой одним мономерным звеном на поверхности молекулы, равен  $r = 0,25$  нм.

**Всего – 9 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 4. Пористый материал



Из некоторого вещества с истинной<sup>1</sup> плотностью  $\rho = 3 \text{ г/см}^3$  получили пористый материал **М** с удельной<sup>2</sup> площадью поверхности пор  $S_{\text{уд}} = 500 \text{ м}^2/\text{г}$ . Известно, что все поры материала **М** имеют форму цилиндров радиуса  $r$ , оси этих цилиндров параллельны и расположены друг относительно друга в вершинах квадрата со стороной  $2,1r$ .

Рассчитайте  $r$  (в нм), общую удельную<sup>2</sup> длину пор  $l_{\text{п(уд)}}$  (в м/г), кажущуюся<sup>3</sup> ( $\rho'$ ) плотность (в  $\text{г/см}^3$ ) и величину пористости<sup>4</sup>  $\gamma$  материала **М**.

Подсказка: для удобства расчетов можно считать образец материала **М** кубом со стороной  $a$ .

<sup>1</sup> Истинная плотность – это масса единичного объема сплошного материала без пор.

<sup>2</sup> Удельная величина – это величина, отнесенная к единице массы образца.

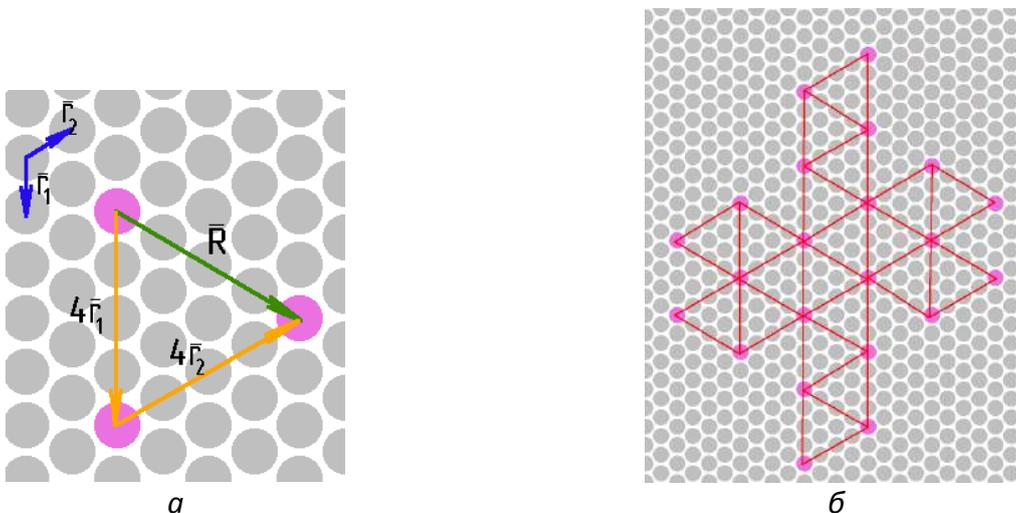
<sup>3</sup> Кажущаяся (средняя) плотность – это масса единичного объема материала с учетом пор.

<sup>4</sup> Пористость – это величина, равная отношению суммарного объема пор к общему объему пористого материала.

**Всего – 10 баллов**

## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 5. Полые металлические кластеры



*Рис. 1. Пример для  $(n, m) = (4, 4)$ : а) Единичные векторы  $r_1$  и  $r_2$ , результирующий вектор  $\vec{R} = 4\vec{r}_1 + 4\vec{r}_2$ . б) Развертка, задаваемая вектором  $\vec{R}$ : если вырезать по периметру фигуру развертки и, сгибая по красным линиям, склеить в замкнутую оболочку, то получится ПМК  $M_{N(4,4)}$  (при этом, в местах склейки вершин атом металла вместо шести-координированного становится пяти-координированным).*

Поверхность полого высоко симметричного металлического кластера (ПМК)  $M_{N(n,m)}$  можно представить в виде «выкройки» из плотноупакованного листа атомов металла М. Такая «выкройка» состоит из 20 одинаковых равносторонних треугольников (рис. 1). Чтобы однозначно ее выбрать, достаточно задать относительное расположение центров двух будущих пяти-координированных атомов М на листе, которое определяется вектором  $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$  (суммой единичных векторов с коэффициентами  $n$  и  $m$ ).

1. Сколько атомов металла содержит кластер  $M_{N(4,4)}$ ? Ответ подтвердите расчетом. **(1 балл)**
2. Форму и симметрию какого многогранника имеют кластеры  $M_{N(n,m)}$ ? **(0,5 балла)**
3. Оцените\* размер ПМК  $M_{N(4,4)}$  из атомов золота радиусом 0,144 нм. **(2 балла)**
4. Сколько атомов металла  $N(n,n)$  будет в ПМК  $M_{N(n,n)}$  при произвольном значении  $n$ ? **(1,5 балла)** Выведите формулу количества атомов  $N(n,m)$  для произвольных значений  $(n,m)$ . **(3 балла)** Сколько пяти- и шести-координированных атомов (то есть, имеющих пять и шесть соседей, соответственно) содержит такой ПМК? **(0,5 балла)**
5. Каким образом надо расположить атомы углерода относительно атомов М в ПМК, чтобы они «сложились» в фуллерен\*\*? **(0,5 балла)** Как относительно атомов М в исходном ПМК располагаются вершины, ребра и грани такого фуллеренового многогранника? **(0,5 балла)** Найдите все значения  $(n,m)$  для ПМК, которым отвечают самый маленький фуллерен  $C_{20}$  и бакибол  $C_{60}$ . **(2,5 балла)**

\* Можно воспользоваться справочными формулами.

\*\* Фуллерен - каркасная молекула из атомов углерода, каждый из которых связан ровно с тремя соседними, а сами эти связи формируют исключительно пяти- и шестиугольные грани.

**Всего – 12 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур) Задача 6. ДНК для хранения информации: от теории к практике

Молекулы ДНК обладают одной из самых больших плотностей хранения информации. Недавно группа ученых предложила способ кодирования информации с использованием адресной записи в короткие последовательности нуклеотидов. Например, ученые смогли закодировать в ДНК, а затем успешно прочесть разнообразные файлы с данными, включая 3 изображения (рис. 1) и даже операционную систему. Такой способ позволяет быстро находить и считывать только нужные фрагменты данных, не требуя технически сложно реализуемых чтения и записи длинных молекул ДНК.



Рис. 1

Рассмотрим пример использования такого способа кодирования информации (рис. 2). Файл, состоящий из логических нулей и единиц, кодируется последовательностью нуклеотидов, записанной 4 буквами (A, C G, T), которая содержит такое же количество информации. Эта последовательность затем разбивается на строки, содержащие не более 192 нуклеотидов (блок II, рис. 2). Порядковый номер строк (начиная с 0) называется адресом и кодируется в последовательности из 8 нуклеотидов (блок I, рис. 2), для этого он записывается в двоичном виде и кодируется тем же кодом, что и остальные данные.



Рис. 2

1. Найдите, какой максимальный объем файла (в мегабайтах) можно закодировать таким способом. **(2 балла)**

Далее приведены все прочтенные ДНК-цепочки (расположенные в случайном порядке), отвечающие некоторому файлу-изображению.

2. Сколько строк и символов нуклеотидов содержит такая запись файла, **(1 балл)** рассчитайте размер (в байтах) исходного файла изображения. **(1 балл)**



GGGGGGTATGAGTGATACACTACCTGAATTCCTTATCATGGGGCGAAACTTTGGCTAATTCTCACCGAAAGCGATTGCAC  
GCGCCTATGCCTGTCAAGTGAGCCGAGTTTCATCGCCAGGGACCAAACCACTTAAACGCGATCTAGGATTTTGAACGATCC  
CGACGAATCGACCGTCCCGGATCGCCCAAGCGAGAGTGCCG

GGGGGGGCGAGGGGAGCCCCGAGGGAAGCTCCAGATGGGGCAGTTGACGTACGCTGGCAGCACCATATGACAATGGCG  
TCGCCGGGCGGGACGCCATAACCGGAATGGTAGCGCCGAAGATCTGTGTGAACCGGGAGCTCGAGCACCGGCAGGGATGG  
TGTTTCCGCGCCGGTACAGTCGAAATCCTCGCGGCGGAGTG

GGGGGGACGAGCTGTGCATACTTGTACCTTACCTAAGCTGTGTCAAGGCGTGCAGAGTTATCGGGAATACGACATGACAA  
CATCTGCGCCGAGAGCGGCAGAGTTCCAGGCGCATGTTGACCTCCTTGTGATATTTAATTATGGACAGTGTAAAGGCCG  
TGAGATACCTTATATTATACTCTACCGGCTGAGAACGACCC

GGGGGCGGACTCCGAGATCGGTATACCTCCTCGTAAATGGTGCCTTAGCAGGGTTTACTGGTTCGTTATCGCAGAAT  
GCGATTCCTTACTCTGAAGCCATCGTGTGGGTCTCTGGTTCCTAGCGCAGGTTCTGGACGTCTGGGCGCGCCGGTAGGCCT  
GATGCTGTCAATGTAAGAGCTCCGGCCTCGTTGTGTGTCAGGTA

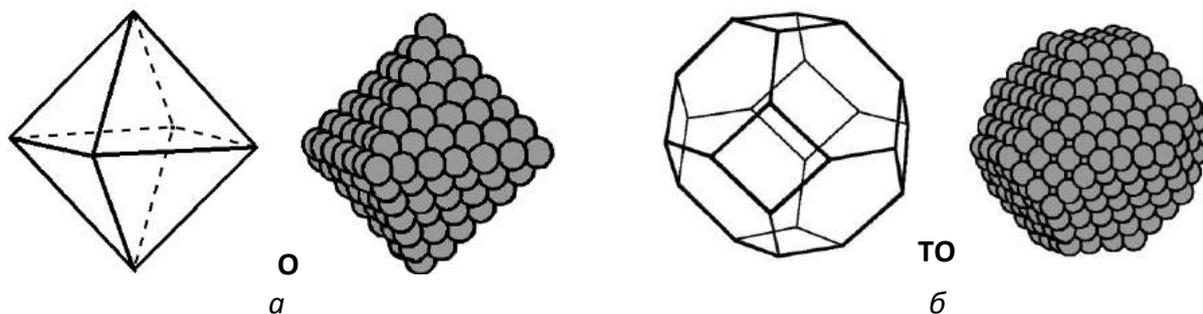
GGGGGGGGTGTCCCGGCGATCGCAGGACGGTTGCTTGGTTGGGGGGGGGGGGGACCGTCCGTGCGCGCCGTGGGGGGG  
GGGGGTCAGGGGGGGGGGGGGGAGGGGTGGGGTGGGGGGGGGGGGCTTAGGCGTGCCTGAAGGGGGGGGGGAGAGACGT  
CCGCGCGGCCCGCATGACTTATACCTTAGATACTATAGGA

GGGGGGGTGACTGTACTCGCATAATCGCTCCGGTCCGTTCATATATAATATAATCCCGGTGGTAAGTTCCGGCGGGGTGTG  
CCCCCTCGGGGACCGTATTTACCTTAAACGATCGGTTGCAGTATGGCAGTCTTCTAAAAGACAGGGTCTGTGCCTCCCC  
TCGTCTTCTCAGTGCGGGACATACTTGGCGCCCGTGTCTAAG

GGGGGGCCTGGTAATTATAATTTGCGACATGGCACCCCTAAATCCCGATGTTCAAATTTCCATGAGTCAAGAAATCGCA  
GTGCAAGCCATTAACCTATCTACCGTCTTTTTAAAACAAGAAAGCATGGAATTCACCGAGCAAATAGATAATCCTTATCGG  
AAAGACTACGCGCCATCCTAATGATGTATACTCTCTGTGTCG

**Всего – 17 баллов**

Задача 7. Золотые октаэдр



Атомы золота могут образовывать кластеры в форме:

а) октаэдра **O** с ребром **n** атомов и общим числом атомов  $O(n) = (2n^3 + n)/3$ ;

б) правильного усеченного октаэдра **TO** с ребром **m** атомов и общим числом атомов  $TO(m) = 16m^3 - 33m^2 + 24m - 6$ . На рисунке приведены примеры для **n = 7** и **m = 4**.

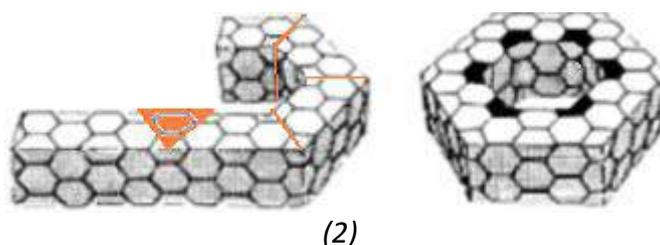
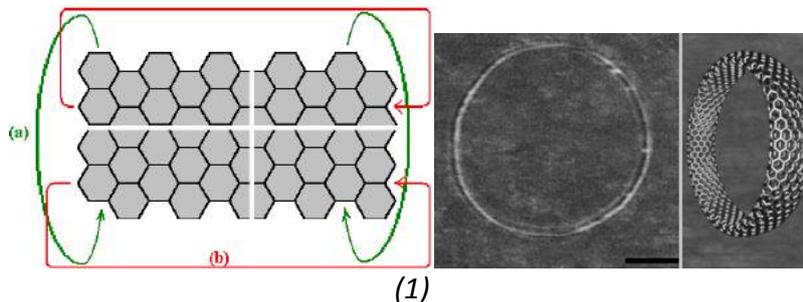
1. Сколько атомов золота приходится на каждую грань октаэдрического кластера с ребром в **n** атомов? **(0,5 балла)** Выведите общую формулу для числа атомов в поверхностном слое золотого октаэдра **S<sub>O</sub>(n)**. **(1,5 балла)**
2. Форму каких многоугольников имеют грани усеченного октаэдра? **(0,5 балла)** Сколько атомов золота приходится на каждый из них для кластера **TO** с ребром в **m** атомов? **(1,5 балла)** Выведите общую формулу для числа атомов в поверхностном слое золотого октаэдра **S<sub>TO</sub>(m)**. **(2 балла)**
3. Как правило, при близком общем числе атомов золота более предпочтительной является форма кластера, имеющая меньшую площадь поверхности. Рассчитайте доли поверхностных атомов\* для усеченного октаэдра с ребром **m = 5** и для октаэдра, усечением которого он получен, и сделайте вывод, какая форма кластера золота будет более предпочтительной. **(3 балла)**

\* Доля поверхностных атомов – отношение числа поверхностных атомов к общему числу атомов.

**Всего – 9 баллов**

**Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)**

**Задача 8. Наноторы из нанотрубок: от больших к самому маленькому**



Если вырезанную из листа графена фигуру (рис. 1) свернуть и затем склеить по горизонтальному «шву» как показано на рис. 1 (а), то мы получим углеродную нанотрубку. Сгибая эту трубку и склеивая ее торцы (рис. 1 (б)), мы получаем углеродный нанотор, состоящий исключительно из шестиугольных граней.

Для любых торов величина  $\chi = V - E + F$  (где  $V$ ,  $F$ ,  $E$  – количество вершин, граней и ребер, соответственно), называемая Эйлеровой характеристикой, является постоянной.

1. Допустим, нанотор (1) содержит  $m$  шестиугольников. Рассчитайте, сколько вершин  $n$  и ребер  $E$  он имеет. **(1 балл)** Найдите  $\chi$  для тора. **(1 балл)**
2. Выведите формулу, описывающую в общем виде зависимость  $n$  для произвольного нанотора, содержащего пяти-, шести- и семиугольные грани, от числа граней каждого типа. Основываясь на полученном значении  $\chi$ , определите, существуют ли для наноторов (как в случае фуллеренов) ограничения на количество нешестиугольных граней? **(2 балла)**

Хотя при получении нанотора (1) склейка (а) листа графена в нанотрубку не меняет длины ребер в шестиугольниках, склейка (б) невозможна без их искажения. Однако, если из нанотрубки удалить  $b$  сегментов, как показано на рис. 2, то можно получить тор (нанотор (2)) без искажений длин ребер. При этом в местах удаления сегментов образуются пяти- и семиугольники, число которых будет постоянно для всех наноторов такого типа (см. задачу, [«Углеродный нанобублик»](#)).

3. Установите формулы (число атомов углерода) самых маленьких торов первого и второго типов. **(2 балла)** Постройте их развертки на плоскости (как показано на рис. 1). **(4 балла)**

**Всего – 10 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 9. Фуллерены

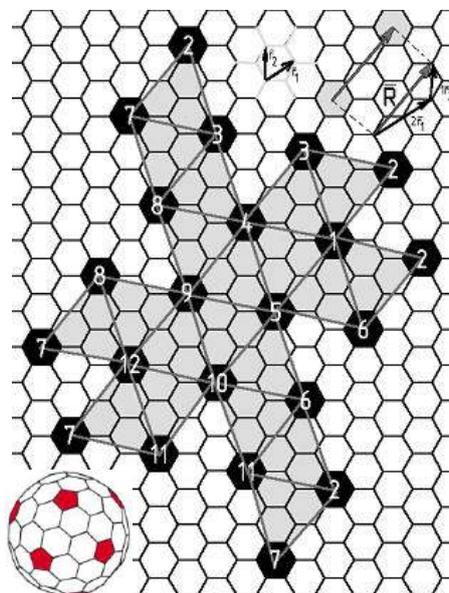
Молекулы фуллеренов представляют собой выпуклые многогранники, составленные из атомов углерода\* и имеющие только пяти- и шестиугольные грани. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, рассчитайте, сколько одинарных и двойных связей, а также пяти- и шестиугольников имеют фуллерены  $C_{2017}$  и  $C_{2018}$ .

\* Каждый атом углерода образует две одинарных и одну двойную связь с соседними атомами.

**Всего – 6 баллов**

**Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)**  
**Задача 10. Изомерия икосаэдрических фуллеренов**

Любой икосаэдрический фуллерен можно представить в виде «выкройки» на графеновой плоскости (рис. 1).



*Рис. 1. Пример развертки икосаэдрического фуллерена  $C_{140}$  на графеновой плоскости ( $n = 2, m = 1$ ); если склеить вершины треугольников с одинаковыми номерами, получится фуллерен. На графеновой плоскости отмечены единичные векторы  $r_1$  и  $r_2$  и показан задающий развертку вектор  $\vec{R} = 2\vec{r}_1 + 1\vec{r}_2$ .*

Общее число атомов при этом определяется по формуле  $N = 20(n^2 + nm + m^2)$ , где неотрицательные числа  $n$  и  $m$  – индексы хиральности – задают радиус-вектор  $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$ , длина которого равна стороне треугольника «выкройки». Изомерными называются молекулы икосаэдрических фуллеренов, имеющие одинаковое число атомов  $N$ , но разную сумму индексов хиральности  $c = n + m$ .

1. Рассматривая зависимость  $c(n)$  для изомеров произвольного икосаэдрического фуллерена  $C_N$  как непрерывную функцию, найдите значения  $c_{\min}$  и  $c_{\max}$ . Запишите индексы хиральности  $(n, m)$  для этих изомеров через  $X = N/20$ . **(7 баллов)**  
Возможно ли для реального фуллерена  $C_N$  одновременное существование изомеров с суммами индексов хиральности  $c_{\min}$  и  $c_{\max}$ ? **(1 балл)**
2. Икосаэдрический фуллерен  $C_{242060}$  имеет шесть изомеров. Найдите  $(n, m)$  для изомеров  $C_{242060}$ , имеющих минимальное и максимальное значение  $c$ . Поясните логику поиска. **(8 баллов)**

В рамках задачи считайте фуллерены  $(n, m)$  и  $(m, n)$  одним и тем же изомером.

**Всего – 16 баллов**