



Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Простые задачи (вариант 3)

Задача 1. Растворы белка

1. Массовая доля некоторого белка в растворе составляет 18 %. Рассчитайте минимальное расстояние L (в нм) между центрами молекул белка, если масса $6 \cdot 10^{23}$ молекул белка составляет 78732 г. **(6 баллов)**
2. Во сколько раз необходимо разбавить такой раствор, чтобы L увеличилось в 4 раза? **(2 балла)**

Считайте, что молекулы белка распределены в растворе равномерно так, что каждая из них имеет 6 равноудаленных ближайших соседей; плотность растворов составляет 1 г/см^3 .

Всего – 8 баллов

Задача 2. Дополнительная пара

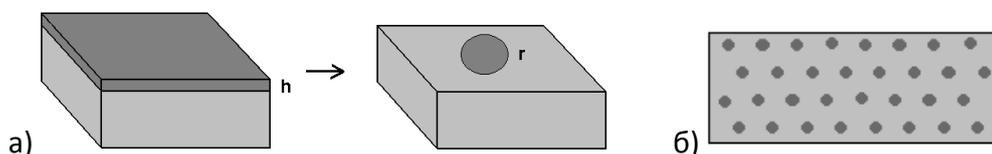
Наследственную информацию в двойной спирали молекул ДНК можно рассматривать как строчку текста, записанную всего четырьмя буквами – **A, G, T, C**. Недавно ученым удалось создать полусинтетический организм – кишечную палочку, в ДНК которой помимо четырех стандартных присутствует еще пара нестандартных нуклеотидных «букв» – **X** и **Y**. Такие организмы могут хранить и передавать потомству дополнительное количество информации, которая в будущем может быть использована для создания внутри клеток уникальных нанофабрик и управления ими.

1. Найдите, сколько однобитных ячеек памяти в компьютере потребуется, чтобы закодировать в цифровом виде последовательность из 6 нуклеотидов для а) обычного и б) полусинтетического организмов. **(4 балла)**
2. Сколько разных последовательностей нуклеотидов можно получить, меняя любые два нуклеотида в последовательности из 26 стандартных нуклеотидов на **X** и **Y** в произвольном сочетании? **(4 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 3. Нанокластеры из пленки

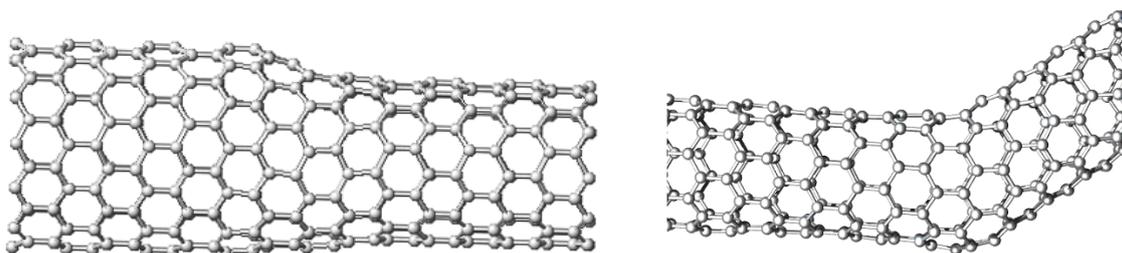
Напыленная на подложку тонкая нанопленка золота при нагревании плавится и распадается на капли, которые при последующем охлаждении застывают в виде сферических нанокластеров.



1. Сколько капель образуется на квадратной подложке размером 100 мкм, если на 1 нм² приходится $2.5 \cdot 10^{-4}$ капель? **(2 балла)**
2. Каково расстояние между центрами кластеров **L**, если они расположены друг относительно друга как на рис 1б. **(3 балла)**
3. Найдите радиус полученных кластеров **r** (нм), если толщина исходной пленки равна 27 нм. **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 4. Нанопереходник



Нанопереходник между двумя углеродными нанотрубками содержит дефекты, число и расположение которых определяет его геометрию (см. примеры на рисунке).

1. Докажите, что в нанопереходнике не могут находиться дефекты только одного типа. **(4 балла)**
2. Какое минимальное число пяти- и семиугольных дефектов содержится в некотором нанопереходнике, если известно, что он содержит не менее 5 пятиугольников и 8 семиугольников? **(4 балла)**

Подсказка. Углеродные нанотрубки (УНТ) представляют собой свернутые в трубку сетки шестиугольников. В любой вершине как УНТ, так и нанопереходников сходятся по 3 ребра. Для простоты можно считать, что торцы УНТ закрыты шапочками, состоящими из пяти- и шестиугольников, а из дефектов нанопереходник может содержать только пяти- и/или семиугольники.

Всего – 8 баллов

Задача 5. Половинки от фуллерена

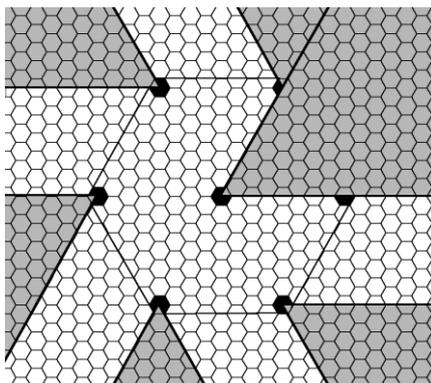


Рис. 1. Выкройка. а) На листе графена удаляются 60° сектора – получается закрытая с одного торца нанотрубка. б) Затем по тонкой линии отрезается шапочка, из двух таких шапочек склеиванием по линии разреза получается фуллерен C_x .

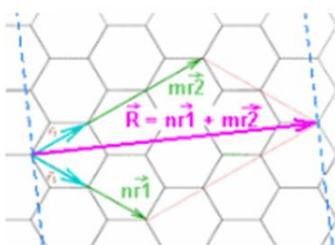


Рис. 2. Для получения нанотрубки с индексами хиральности (n, m) графеновую плоскость надо разрезать по пунктирным линиям и свернуть вдоль направления вектора R .

В этом примере $n = 2, m = 3$.

Различают следующие типы нанотрубок:

- зубчатые, $n = m$; - зигзагообразные, $m=0$ или $n=0$;
- хиральные нанотрубки (все остальные значения n и m).

1. Найдите индексы (n, m) хиральности полученной в 1а) нанотрубки. К какому типу она относится? (4 балла)
2. Чему равно x для полученного в 1б) фуллерена C_x ? (4 балла)

Всего – 8 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Простые задачи (вариант 4)

Задача 1. Растворы белка

1. Массовая доля некоторого белка в растворе составляет 17 %. Рассчитайте минимальное расстояние L (в нм) между центрами молекул белка, если масса $6 \cdot 10^{23}$ молекул белка составляет 52224 г. **(6 баллов)**
2. Во сколько раз необходимо разбавить такой раствор, чтобы L увеличилось в 5 раз? **(2 балла)**

Считайте, что молекулы белка распределены в растворе равномерно так, что каждая из них имеет 6 равноудаленных ближайших соседей; плотность растворов составляет 1 г/см^3 .

Всего – 8 баллов

Задача 2. Дополнительная пара

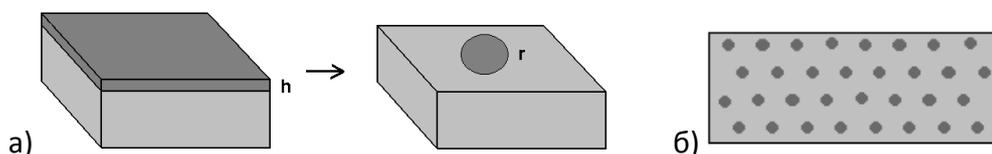
Наследственную информацию в двойной спирали молекул ДНК можно рассматривать как строчку текста, записанную всего четырьмя буквами – **A, G, T, C**. Недавно ученым удалось создать полусинтетический организм – кишечную палочку, в ДНК которой помимо четырех стандартных присутствует еще пара нестандартных нуклеотидных «букв» – **X** и **Y**. Такие организмы могут хранить и передавать потомству дополнительное количество информации, которая в будущем может быть использована для создания внутри клеток уникальных нанофабрик и управления ими.

1. Найдите, сколько однобитных ячеек памяти в компьютере потребуется, чтобы закодировать в цифровом виде последовательность из 7 нуклеотидов для а) обычного и б) полусинтетического организмов. **(4 балла)**
2. Сколько разных последовательностей нуклеотидов можно получить, меняя любые два нуклеотида в последовательности из 24 стандартных нуклеотидов на **X** и **Y** в произвольном сочетании? **(4 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 3. Нанокластеры из пленки

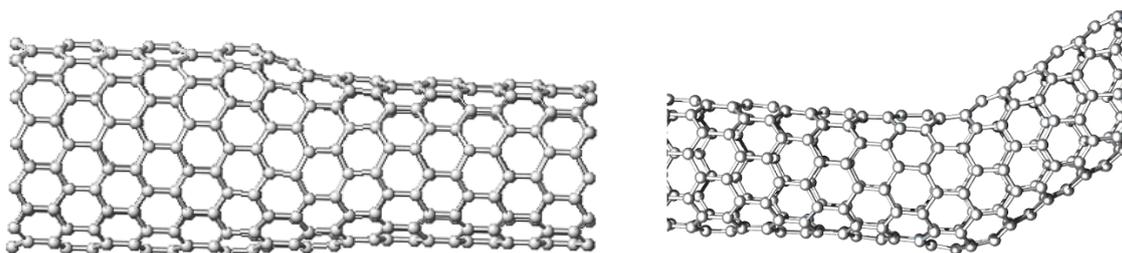
Напыленная на подложку тонкая нанопленка золота при нагревании плавится и распадается на капли, которые при последующем охлаждении застывают в виде сферических нанокластеров.



1. Сколько капель образуется на квадратной подложке размером 100 мкм, если на 1 нм² приходится $1.25 \cdot 10^{-4}$ капель? **(2 балла)**
2. Каково расстояние между центрами кластеров **L**, если они расположены друг относительно друга как на рис 1б. **(3 балла)**
3. Найдите радиус полученных кластеров **r** (нм), если толщина исходной пленки равна 32 нм. **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 4. Нанопереходник



Нанопереходник между двумя углеродными нанотрубками содержит дефекты, число и расположение которых определяет его геометрию (см. примеры на рисунке).

1. Докажите, что в нанопереходнике не могут находиться дефекты только одного типа. **(4 балла)**
2. Какое минимальное число пяти- и семиугольных дефектов содержится в некотором нанопереходнике, если известно, что он содержит не менее 6 пятиугольников и 9 семиугольников? **(4 балла)**

Подсказка. Углеродные нанотрубки (УНТ) представляют собой свернутые в трубку сетки шестиугольников. В любой вершине как УНТ, так и нанопереходников сходятся по 3 ребра. Для простоты можно считать, что торцы УНТ закрыты шапочками, состоящими из пяти- и шестиугольников, а из дефектов нанопереходник может содержать только пяти- и/или семиугольники.

Всего – 8 баллов

Задача 5. Половинки от фуллерена

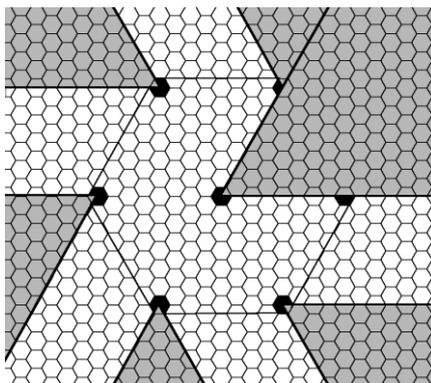


Рис. 1. Выкройка. а) На листе графена удаляются 60° сектора – получается закрытая с одного торца нанотрубка. б) Затем по тонкой линии отрезается шапочка, из двух таких шапочек склеиванием по линии разреза получается фуллерен C_x .

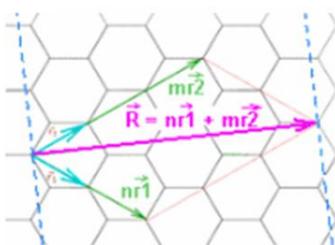


Рис. 2. Для получения нанотрубки с индексами хиральности (n, m) графеновую плоскость надо разрезать по пунктирным линиям и свернуть вдоль направления вектора R .

В этом примере $n = 2$, $m = 3$.

Различают следующие типы нанотрубок:

- зубчатые, $n = m$; - зигзагообразные, $m=0$ или $n=0$;
- хиральные нанотрубки (все остальные значения n и m).

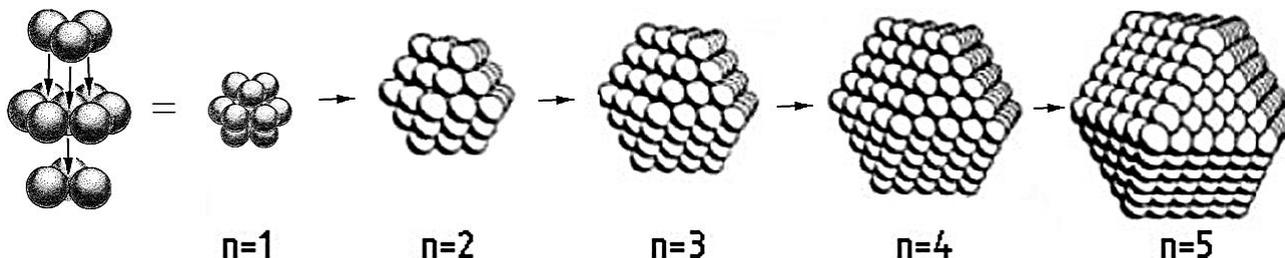
1. Найдите индексы (n, m) хиральности полученной в 1а) нанотрубки. К какому типу она относится? (4 балла)
2. Чему равно x для полученного в 1б) фуллерена C_x ? (4 балла)

Всего – 8 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Более сложные задачи

Задача 6. Кубооктаэдр



Первым шагом роста нанокластера является образование оболочки из 12 атомов вокруг центрального. Среди таких оболочек выделяется высокосимметричное расположение атомов в виде кубооктаэдра (см. рисунок, $n = 1$), при котором все соседние атомы касаются как друг друга, так и центрального атома. Это позволяет послойно увеличивать нанокластер (как показано на рисунке) так, что при этом все соседние атомы новых оболочек также касаются друг друга и атомов из предыдущей оболочки, а полученные нанокластеры являются фрагментами плотнейшей упаковки шаров.

1. Сколько вершин, ребер, треугольных и квадратных граней у кубооктаэдра? **(1 балл)**
2. Опираясь на полученный ранее ответ, найдите общую формулу числа атомов **M** в оболочке с номером **n**. **(5 баллов)**
3. Сколько всего атомов **N** содержит нанокластер, состоящий из **n** оболочек? **(4 балла)**
4. а) Найдите размер* нанокластера платины с $n = 4$, если радиус атома платины $r = 0,14$ нм. **(3.5 балла)**
 б) Какова доля поверхностных атомов в этом кластере? **(1.5 балла)**
5. Сколько отличающихся координационным числом (КЧ)** типов атомов*** имеется в кубооктаэдрическом нанокластере? Расположите их в порядке убывания КЧ (укажите его) и поясните, где в нанокластере расположен каждый из них. **(5 баллов)**

*Как диаметр сферы, описанной вокруг нанокластера.

**Число ближайших соседей, касающихся данного атома.

***Подсказка: рассмотрите для них касания как внутри одного слоя, так и с атомами соседних слоев.

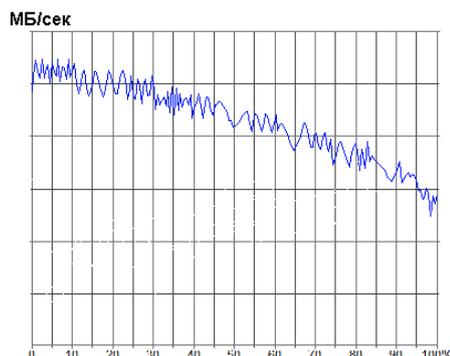
Подсказка.
$$\sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Всего – 20 баллов

Задача 7. Нанотехнологии и математика: характеристики жесткого диска



а)



б)

Рис. а) Устройство магнитного жесткого диска: видна пластина и головка, производящая чтение и запись информации. б) Пример зависимости графика скорости последовательного чтения от доли пройденной поверхности для реального жесткого диска.

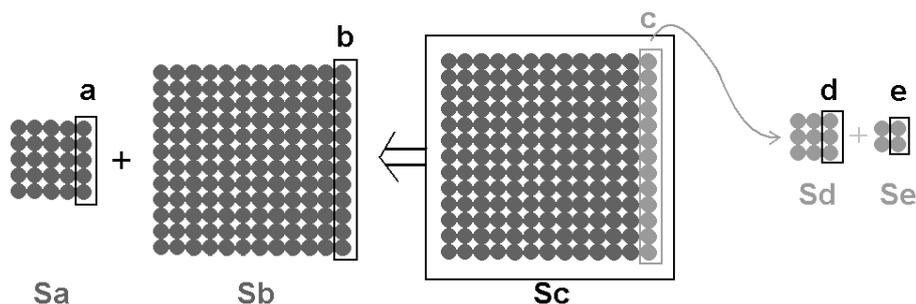
Благодаря успехам в области нанотехнологий на сегодняшний день массово производятся магнитные жесткие диски, пластины которых содержат примерно 1 терабайт информации.

1. Оцените размер домена (в нм) на поверхности такого диска (Считайте, что диск состоит из доменов практически квадратной формы, плотно прилегающих друг к другу). **(6 баллов)**
2. Какое количество информации (в терабайтах) можно будет разместить на одной пластине диска, если с помощью нанотехнологий удастся уменьшить размер домена до 10 нм? **(2 балла)**
3. Рассчитайте время (в минутах), за которое при последовательном чтении прочитается вся информация с жесткого диска. **(6 баллов)**
4. Рассчитайте максимальную скорость последовательного чтения для такого диска (в мегабайтах за секунду). Во сколько раз максимальная скорость последовательного чтения будет больше минимальной? **(6 баллов)**

Считать, что диск состоит из одной пластины, внешний диаметр области данных составляет 9.1 см, внутренний – 3.7 см, при работе диска пластина вращается с частотой 7200 оборотов в минуту, информация хранится на двух сторонах пластины, последовательное чтение может происходить с двух сторон пластины одновременно. В каждый домен может быть записан один бит информации. При решении считать 1 терабайт равным 10^{12} байт.

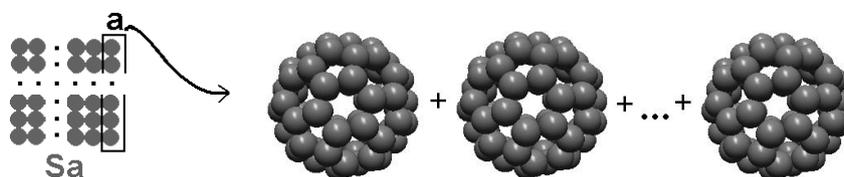
Всего – 20 баллов

Задача 8. Свойства квадратных нанокластеров



Рассмотрим **Sa - Se** – квадратные кластеры некоторого химического элемента X, ребра которых содержат, соответственно, **a - e** атомов. Известно, что **c** атомов ребра кластера **Sc** можно разложить на 2 кластера – **Sd** и **Se** (см. пример на рисунке).

1. Докажите в общем виде, что все атомы **Sc**, в свою очередь, можно разложить на кластеры **Sa** и **Sb**. **(5 баллов)**
2. Найдите два возможных решения для **a**, **b** и **c**, если известно, что $d = 11 \cdot (e \text{ div } 2)$ и $e < 10$, а **c** – простое число. **(5 баллов)**
3. Докажите, что, если **c** и **b** – простые числа, а $d > 4$, то из **a** атомов ребра **Sa** можно сложить не менее одного кластера в форме бакибола X_{60} . **(10 баллов)**



Подсказка: рассмотрите делители числа 60.

Все упомянутые в задаче разложения группы атомов на кластеры проходят без остатка; div - вычисление неполного частного от деления (пример: $20 \text{ div } 7 = 2$).

Вспомогательная информация:

Теорема Эйлера для выпуклого многогранника: $V - E + F = 2$, где **V**, **E**, **F** – это, соответственно, число вершин, рёбер и граней многогранника.

Фуллерен, содержащий F_6 шестиугольников, имеет $x = 20 + 2F_6$ атомов углерода в молекуле.

$\sqrt{2} = 1,41$, $\sqrt{3} = 1,73$, $\sqrt{5} = 2,24$, $\sqrt{7} = 2,65$, $\sqrt{11} = 3,32$

При расчетах π считать равным 3.

Всего – 20 баллов