ФИЗИКА

Физика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Решения. Простые задачи (вариант 2)

Решение задачи 1. Микрофон

1. Из условия равенства сил, действующих на обкладку:

$$k\Delta x = \Delta p S$$
$$\Delta p = \frac{k\Delta x}{S} = \frac{10^3\ \text{Н/м} \cdot 10\text{нм}}{10^4\text{мкм}^2} = 10^3\text{Па}$$

2. По определению напряжения на конденсаторе:

$$\Delta U = \frac{q}{C_2} - \frac{q}{C_1} = q\left(\frac{d_2}{\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{d_1}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\right) = \frac{q\Delta x}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{10^{-11}\text{Кл}10^{-8}\text{м}}{10 \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}\ 10^{-8}\text{м}^2} = 113\text{мВ}$$

Решение задачи 2. Оптоакустические нанокомпозиты

Интенсивность оптоакустического сигнала пропорциональна:

$$I \sim \frac{\beta}{C} H, \quad (1)$$

где H – мощность нагрева, которая в свою очередь пропорциональна коэффициенту поглощения. Поэтому, чтобы узнать во сколько раз возрастет оптоакустический сигнал, необходимо разделить выражение (1) само на себя для случаев обычной наночастицы германия и нанокомпозита. При этом, теплоемкость наночастицы будет усредненной (эффективной), а коэффициент теплового расширения будет равен b_P, т.к. полимер и наночастица будут расширяться независимо друг от друга. Получим:

$$\eta = I_{comp}/I_G = \left(\frac{\beta_P}{\beta_G}\right)\left(\frac{(1-P)\rho_G C_G + P\rho_P C_P}{(1-P)\rho_G + P\rho_P}\right) \Bigg/ \left(\frac{(1-P)\rho_G C_G + P\rho_W C_W}{(1-P)\rho_G + P\rho_W}\right)$$
$$\frac{120 \cdot (5.3 \cdot 0.32 + 1.5)}{6(5.3 \cdot 0.32 + 4.2)} = 10.8 \quad (2)$$

Решение задачи 3. Магнитные наночастицы для диагностики

1. В порядке убывания АБВГ или БАВГ. В точках А и Б индукция равна и максимальна, т. к. внешнее поле складывается с вкладом диполя. В точках В и Г поле диполя вычитается из внешнего, но в точке Г вычитаемое больше и результирующее поле минимально.

2. Рассчитаем поле от наночастицы на расстоянии R и приравняем его 10^{-6} от B_0.

$$\frac{\mu_0 \cdot P}{4\pi r^3} = 10^{-6} B_0. \quad (3)$$

Отсюда:

$$B_0 = 0.25\text{Тл} \tag{4}$$

Решение задачи 4. Лазерное наноструктурирование поверхности

1. Из сравнения верхней и нижней частей рисунка можно заключить, что заштрихованная область соответствует значениям интенсивности лазерного излучения, превышающим порог абляции (ответ на первый вопрос).

2. Период результирующего профиля поверхности *Δx* будет равен периоду функции *I*(*x*). Последний можно найти из условия, что период функции $\cos^2\varphi$ равен π, следовательно:

   $\frac{\pi d}{\lambda L}\Delta x = \pi$, откуда $\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = 400$ нм (ответ на второй вопрос).

   Наконец, ширина образовавшихся на облучаемой поверхности впадин определяется из условий:

$$4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L}x\right) = I_0,$$

$$\cos\frac{\pi d}{\lambda L}x = \pm\frac{1}{2}, \qquad \frac{\pi d}{\lambda L}x = \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}\\ \frac{2\pi}{3}\end{array}\right., \qquad x_1 = \frac{\lambda L}{3d}, x_2 = \frac{2\lambda L}{3d}$$

$\delta = \Delta x - (x_2 - x_1) = \Delta x - \frac{\lambda L}{3d} = \frac{2\lambda L}{3d} \approx 267$ нм (ответ на третий вопрос).

Решение задачи 5. Микроскоп наоборот

1. Полный коэффициент уменьшения микроскопа $k_{полн}$ в предложенной схеме будет равен произведению коэффициента уменьшения окуляра $k_{ок}$ на коэффициент уменьшения объектива $k_{об}$ (при этом $k_{об}$ равен кратности увеличения объектива в силу принципа обратимости). $k_{ок}$ найдем с помощью формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \qquad d = 4F, \qquad f = \frac{4F}{3}, \qquad k_{ок} = \frac{d}{f} = 3$$

   Таким образом, $k_{полн}$ = 3·100 = 300, следовательно, зазор *l* между полосками на изображении будет равен *l* = *L*/300 = 500 нм (ответ на первый вопрос).

2. Минимальное расстояние между полосками L_{min}, при котором они еще не будут сливаться на полученном изображении, определяется (в предельном случае независимо от наблюдателя) дифракционным пределом разрешения, который можно оценить как половину длины волны света. Для белого света можно взять среднее значение длины волны 550 нм, поэтому предельно разрешимое расстояние между полосами на их изображении можно оценить как l_{min} ≈ 550/2 = 275 нм. Откуда $L_{min} \approx l_{min}\cdot k_{полн}$ = 82.5 мкм (ответ на второй вопрос).

ФИЗИКА

Физика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Решения. Простые задачи (вариант 4)

Решение задачи 1. Микрофон

1. Из условия равенства сил, действующих на обкладку:

$$k\Delta x = \Delta pS$$
$$\Delta x = \frac{S\Delta p}{k} = \frac{10^{-8}\text{м}^2 \cdot 13{,}510^3\ \text{кг/м}^3\ 9{,}8\ \text{м/с}^2\ 10^{-3}\text{м}}{10^3\ \text{Н/м}} = 1{,}32\text{нм}$$

2. По определению напряжения на конденсаторе:

$$\Delta U = \frac{q}{C_2} - \frac{q}{C_1} = q\left(\frac{d_2}{\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{d_1}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\right) = \frac{q\Delta x}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{10^{-11}\text{Кл} \cdot 1{,}32 \cdot 10^{-9}\text{м}}{10 \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ \Phi/\text{м}\ 10^{-8}\text{м}^2} = 15\text{мВ}$$

Решение задачи 2. Оптоакустические нанокомпозиты

Интенсивность оптоакустического сигнала пропорциональна:

$$I \sim \frac{\beta}{C} H, \tag{5}$$

где H – мощность нагрева, которая в свою очередь пропорциональна коэффициенту поглощения. Поэтому, чтобы узнать во сколько раз возрастет оптоакустический сигнал, необходимо разделить выражение (1) само на себя для случаев обычной наночастицы германия и нанокомпозита. При этом, теплоемкость наночастицы будет усредненной (эффективной), а коэффициент теплового расширения будет равен b_P, т.к. полимер и наночастица будут расширяться независимо друг от друга. Получим:

$$\eta = I_{comp}/I_{Si} = \left(\frac{\beta_P}{\beta_{Si}}\right)\left(\frac{(1-P)\rho_{Si}C_{Si} + P\rho_P C_P}{(1-P)\rho_{Si} + P\rho_P}\right)\Big/\left(\frac{(1-P)\rho_{Si}C_{Si} + P\rho_W C_W}{(1-P)\rho_{Si} + P\rho_W}\right)$$
$$\frac{120 \cdot (2.3 \cdot 0.7 + 1.5)}{2.6(2.3 \cdot 0.7 + 4.2)} = 24.7 \tag{6}$$

Решение задачи 3. Магнитные наночастицы для диагностики

1. В порядке возрастания ГВАБ или ГВБА. В точках А и Б индукция равна и максимальна, т. к. внешнее поле складывается с вкладом диполя. В точках В и Г поле диполя вычитается из внешнего, но в точке Г вычитаемое больше и результирующее поле минимально.

2. Рассчитаем поле от наночастицы на расстоянии R и приравняем его 10^{-6} от B_0.

$$\frac{\mu_0 \cdot P}{4\pi r^3} = 10^{-6} B_0. \tag{7}$$

Отсюда:

$$r = 100\sqrt[3]{\frac{\mu_0 P}{4\pi B_0}} = 100\sqrt[3]{\frac{10^{-7}\cdot 1.6\cdot 10^{-22}}{2}} = 20\cdot 10^{-9} = 20\text{нм} \qquad (8)$$

Решение задачи 4. Лазерное наноструктурирование поверхности

1. Из сравнения верхней и нижней частей рисунка можно заключить, что заштрихованная область соответствует значениям интенсивности лазерного излучения, превышающим порог абляции (ответ на первый вопрос).

2. Период результирующего профиля поверхности Δx будет равен периоду функции $I(x)$. Последний можно найти из условия, что период функции $\cos^2\varphi$ равен π, следовательно:

   $\frac{\pi d}{\lambda L}\Delta x = \pi$, откуда $\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = 504$ нм (ответ на второй вопрос).

   Наконец, ширина образовавшихся на облучаемой поверхности впадин определяется из условий:

$$4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L}x\right) = 3I_0,$$

$$\cos\frac{\pi d}{\lambda L}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{\pi d}{\lambda L}x = \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}\\ \frac{5\pi}{6}\end{array}\right., \qquad x_1 = \frac{\lambda L}{6d}, x_2 = \frac{5\lambda L}{6d}$$

$\delta = \Delta x - (x_2 - x_1) = \Delta x - \frac{2\lambda L}{3d} = \frac{\lambda L}{3d} = 168$ нм (ответ на третий вопрос).

Решение задачи 5. Микроскоп наоборот

1. Полный коэффициент уменьшения микроскопа $k_{\text{полн}}$ в предложенной схеме будет равен произведению коэффициента уменьшения окуляра $k_{\text{ок}}$ на коэффициент уменьшения объектива $k_{\text{об}}$ (при этом $k_{\text{об}}$ равен кратности увеличения объектива в силу принципа обратимости). $k_{\text{ок}}$ найдем с помощью формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad d = 5F, \qquad f = \frac{5F}{4}, \qquad k_{\text{ок}} = \frac{d}{f} = 4$$

   Таким образом, $k_{\text{полн}} = 4\cdot 80 = 320$, следовательно, зазор l между полосками на изображении будет равен $l = L/320 = 625$ нм (ответ на первый вопрос).

2. Минимальное расстояние между полосками $L_{\min}$, при котором они еще не будут сливаться на полученном изображении, определяется (в предельном случае независимо от наблюдателя) дифракционным пределом разрешения, который можно оценить как половину длины волны света. Для белого света можно взять среднее значение длины волны 550 нм, поэтому предельно разрешимое расстояние между полосами на их изображении можно оценить как $l_{\min} \approx 550/2 = 275$ нм. Откуда $L_{\min} \approx l_{\min}\cdot k_{\text{полн}} = 88$ мкм (ответ на второй вопрос).

Решение задачи 6. Нанотехнологии в антидопинговой лаборатории

Т.к. скорость движения молекул, v, обратно пропорциональна их массе, время выхода из колонки, t, – прямо пропорционально массе, M:

$$v = \frac{a}{M} \tag{9}$$

$$t = \frac{LM}{a}, \tag{10}$$

где a – коэффициент пропорциональности.
Таким образом, для мельдония и лейцина получим:

$$v_M = \frac{a}{M_M}; v_L = \frac{a}{M_L}, \tag{11}$$

$$t_M = \frac{LM_M}{a}; t_L = \frac{LM_L}{a} \tag{12}$$

Отсюда время между пиками равно:

$$\Delta t = \frac{L}{a}(M_M - M_L). \tag{13}$$

Полуширины пиков равны на временной диаграмме можно выразить через длину диффузии:

$$\Delta t_M = \frac{2\sqrt{Dt_M}}{v_M} = \frac{2M_M\sqrt{DLM_M}}{a^{3/2}} = 2\sqrt{DL}a^{-3/2} \cdot M_M^{3/2} \tag{14}$$

$$\Delta t_L = \frac{2\sqrt{Dt_L}}{v_L} = \frac{2M_L\sqrt{DLM_L}}{a^{3/2}} = 2\sqrt{DL}a^{-3/2} \cdot M_L^{3/2} \tag{15}$$

Условие отсутствия перекрывания пиков:

$$\Delta t > \frac{\Delta t_M + \Delta t_L}{2}. \tag{16}$$

$$\frac{L}{a}(M_M - M_L) > \sqrt{DL}a^{-3/2}\left(M_M^{3/2} + M_L^{3/2}\right). \tag{17}$$

$$a > \frac{D}{L}\left(\frac{M_M^{3/2} + M_L^{3/2}}{M_M - M_L}\right)^2 \quad (18)$$

Подставим числа:

$$a = \frac{10^{-6}}{0.15}\left(\frac{0.077+0.0587}{0.181-0.151}\right)^2 = 4.9 \cdot 10^{-5}. \quad (19)$$

Найдем скорость движения мельдония и лейцина:

$$v_M = \frac{a}{M_M} > 0.23\text{мм/с} \quad (20)$$

$$v_L = \frac{a}{M_L} > 0.32\text{мм/с} \quad (21)$$

Решение задачи 7. И частица, и волна

Эквивалентность дифракционных картин означает равенство длин волн для рентгеновских лучей и электронов. Найдем выражение для длины волны электронов из того факта, что для них количественные соотношения между волновыми и корпускулярными свойствами такие же, как и для фотонов света. Корпускулярные свойства света можно выразить с помощью формулы:

$$E = pc,$$

полученной из более общего выражения $\vec{p} = E\vec{v}/c^2$.

С другой стороны фотоны, как кванты света, обладают длиной волны, которую можно найти из следующей формулы для их энергии:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} (c = \lambda\nu - \text{ скорость света}).$$

Приравнивая оба выражения для энергии, получаем выражение, связывающее длину волны фотона и его импульс *p*:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Это же соотношение верно и для электронов, движущихся со скоростями v и обладающих импульсом $p_e = m_e v$ и энергией $E_e = \frac{{p_e}^2}{2m_e}$. В результате, импульс электрона, разогнанного в электрическом поле с разностью потенциалов *U*, равен:

$$p_e = \frac{h}{\lambda_e} = \sqrt{2m_e E_e} = \sqrt{2m_e eU},$$

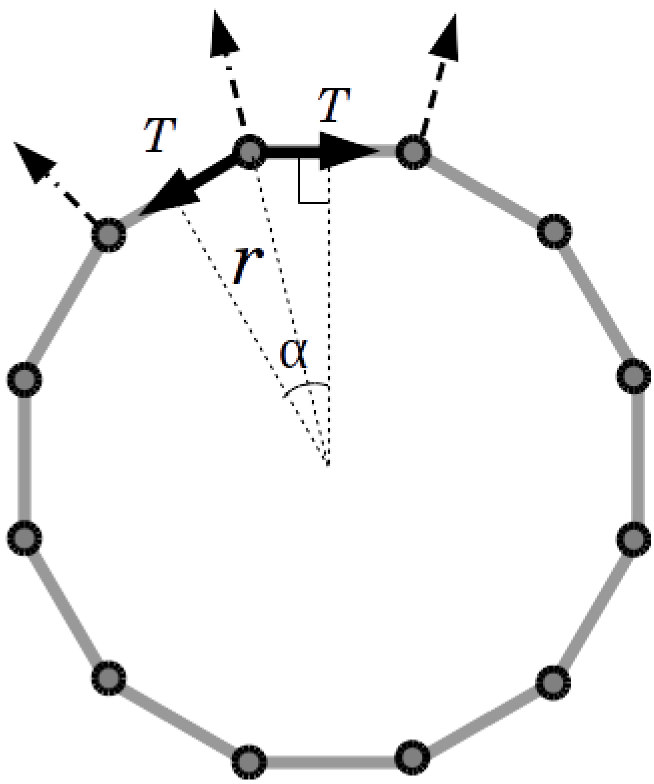
где кинетическая энергия, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов U, равна $E_e = eU$. Таким образом, зная значение длины волны для электрона (λ_e = 0.1 нм), можно найти искомое ускоряющее напряжение по формуле:

$$U = \frac{h^2}{2m_e e \lambda_e{}^2} \approx 150 \text{ В}.$$

Решение задачи 8. «Дышащие» нанотрубки

1. Графит, графен, алмаз, фуллерены, одностенные и многостенные нанотрубки, карбин (линейно- цепочечный углерод), аморфный углерод.

2.



Запишем уравнение динамики (*2-ой закон Ньютона*) для одного атома, на который действуют силы со стороны соседей:

$$ma_r = -2T sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ускорение $a_r = \frac{d(r-r_0)}{dt} = \Delta\ddot{r}$.
Сила упругости: $T = k\Delta l$.
Из треугольника: $l = 2r sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, откуда $\Delta l = 2\Delta r sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Приходим к уравнению колебаний: $m\Delta\ddot{r} + 4k\Delta r sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$, откуда

$$\omega_0^2 = \frac{4k}{m} sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

При большом числе сторон угол можно считать маленьким и воспользоваться $sin(x) \approx x$.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\alpha^2.$$

Для многоугольника справедливо: $\alpha = \frac{2\pi}{N}$, где N — число сторон. При большом числе сторон сумма длин сторон приближенно равна длине окружности $2\pi r \approx l_0 N$. Поэтому угол можно выразить $\alpha = \frac{l_0}{r}$.

Окончательно: $\omega_0 = \frac{l_0}{r}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Вывод: частота колебаний обратно пропорциональна радиусу нанотрубки. Именно такая зависимость наблюдается экспериментально.