Физика

Простые задачи

Задача 1

Для элементного анализа пробу наночастиц подготавливают следующим образом: сперва её испаряют, а затем ионизируют электронным пучком. Температура кипения серебра T = 2485 К, масса атома серебра m_{Ag}= 1.7·10⁻²⁵ кг, масса электрона m_e= 9.1·10⁻³¹ кг. Постоянная Больцмана k = 1.38·10⁻²³ Дж/К. Заряд электрона e = 1.6·10⁻¹⁹ Кл. Энергия электронного пучка E_e= 70 эВ.

Найти отношение кинетической энергии электрона к средней кинетической энергии испаренного атома серебра (**3 балла**).

Найти отношение импульса электрона к импульсу атома серебра в ионизационной камере. (**5 баллов**).

Решение:

Средняя кинетическая энергия атома: $E=\frac{3}{2}kT$.

Импульс частицы: $p=\sqrt{2mE}$.

1 эВ = 1,6·10^{-19} Дж

Вариант 1.

Средняя энергия атома серебра $E_{Ag}=\frac{3}{2}kT=0{,}51\cdot 10^{-19}\ Дж \approx 0{,}32 эВ$

70 эВ = 1,12·10^{-17} Дж

$\frac{E_e}{E_{Ag}}$= 218

$$\frac{p_e}{p_{Ag}}=\frac{\sqrt{2m_e E_e}}{\sqrt{2m_{Ag}E_{Ag}}}=0{,}034$$

Задача 2

Итальянский гравитационный интерферометр VIRGO планируется сделать на базе маятниковых зеркал, подвешенных на высоте L = 10 м и массой M = 60 кг. Для того, чтобы исключить паразитные соударения зеркал с твердыми частицами, их поместили в сверхвысокий вакуум. Представим себе, что с зеркалом абсолютно упруго сталкивается кремниевая наночастица с диаметром d = 100 нм и горизонтальной скоростью v = 50 м/с. Найдите максимальное отклонение зеркала l ? Как соотносятся (в процентах) смещения зеркала, вызванных ударом наночастицы l и распространением гравитационной волны l_0. Примите: l_0 = 10^{-17} м. Плотность кремния — 2,3 г/см^3.

Решение:

Масса наночастицы:

$$m = 1/6\,\pi d^3 \rho = 2300 \cdot 10^{-21} \cdot 3.14/6 = 1.2 \cdot 10^{-18}\text{кг} \tag{14}$$

Найдем импульс зеркала, считая p_n, p_k, p_M — начальным и конечным импульсами наночастиц, и импульсом зеркала после соударения, соответственно:

$$p_n = p_k + p_M \tag{15}$$

$$\frac{p_n^2}{2m} = \frac{p_k^2}{2m} + \frac{p_M^2}{2M} \tag{16}$$

приравняем (3) и (2), возведённое в квадрат и поделенное на 2m:

$$\frac{p_k^2}{2m} + \frac{p_M^2}{2M} = \frac{(p_k + p_M)^2}{2m} \tag{17}$$

$$\frac{p_k^2}{2m} + \frac{p_M^2}{2M} = \frac{p_k^2}{2m} + \frac{2p_k p_M}{2m} + \frac{p_M^2}{2m} \tag{18}$$

$$p_M^2(\frac{1}{2M} - \frac{1}{2m}) = \frac{2p_k p_M}{2m} \tag{19}$$

Пренебрежём 1/2M:

$$p_M(\frac{-1}{2m}) = \frac{2p_k}{2m} \tag{20}$$

Отсюда:

$$p_M = -2p_k \tag{21}$$

В итоге:

$$p_M = 2mv = 1.2 \cdot 10^{-16}\ \text{кг} \cdot \text{м/с} \tag{22}$$

Энергия зеркала:

$$E = \frac{p_M^2}{2\text{M}} = \frac{1.5 \cdot 10^{-32}}{120} = 1.2 \cdot 10^{-34}\text{Дж} \tag{23}$$

Высота подъёма из закона сохранения энергии

$$h = \frac{E}{Mg} = \frac{1.2 \cdot 10^{-34}}{600} = 2 \cdot 10^{-37}\text{м} \tag{24}$$

Теперь найдём смещение маятника. Оно находится по теореме Пифагора.

$$l^2 = L^2 - (L - h)^2 \approx 2Lh \quad (2$$

Отсюда:

$$l = \sqrt{2Lh} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-36} \cdot 10} = 2 \cdot 10^{-18}\text{м} \qquad (26)$$

Смещение из-за наночастицы составляет 20% от смещения из-за гравитационной волны.

Ответ:

$$l = 2 \cdot 10^{-18}\text{м} = 20\% \qquad (28)$$

Задача 3

С появлением наночастиц появилась необходимость измерения их массы. Представим гипотетический масс-спектрометр для наночастиц, в котором будет использоваться эффект давления света. Прибор будет состоять из вакуумной камеры, источника света и детектора наночастиц. Для определения массы падающих наночастиц будет регистрироваться их отклонение от вертикали, вызванное действием горизонтального светового пучка, освещающего наночастицы на начальном участке их траектории.

Какое минимальное давление должен обеспечивать световой пучок высотой 40 см, чтобы сферическая наночастица радиусом 3 нм и массой 2.6·10^{-22} кг, падающая от потолка вакуумной камеры высотой 200 см без начальной скорости, отклонилась при достижении дна камеры не менее чем на 10 см? (**6 баллов**).

Нарисуйте траекторию движения наночастицы внутри камеры масс-спектрометра (**2 балла**).

Решение:

Для ответа на первый вопрос найдем вертикальное и горизонтальное смещение НЧ на первом участке траектории, а также затраченное время и горизонтальную скорость НЧ в конце этого участка:

$$\Delta y_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2\Delta y_1}{g}} \approx 0.29\ \text{с}$$

$$\Delta x_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{a\Delta y_1}{g}, \qquad V_x = at_1 = a\sqrt{\frac{2\Delta y_1}{g}}$$

где горизонтальная составляющая ускорения a возникает за счет давления света p (S – площадь поперечного сечения НЧ):

$$a = \frac{F}{m} = \frac{pS}{m}$$

На втором участке НЧ движется горизонтально с постоянной скоростью V_x и при этом продолжает падать под действием силы тяжести:

$$\Delta x_2 = V_x t_2$$

где время t_2 можно найти из общего времени спуска t:

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{gt^2}{2}, t = \sqrt{\frac{2(\Delta y_1 + \Delta y_2)}{g}} \approx 0.64\ c$$

$$t_2 = t - t_1 \approx 0.35\ \text{с}$$

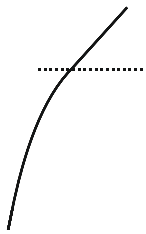
Окончательно для полного горизонтального отклонения имеем:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = a\frac{\Delta y_1}{g} + a\sqrt{\frac{2\Delta y_1}{g}}t_2 = \frac{pS}{m}\left(\frac{\Delta y_1}{g} + t_1 t_2\right)$$

откуда получаем выражение для минимального давления: $p_{min} = \frac{m\Delta x_{min}}{S}\left(\frac{\Delta y_1}{g} + t_1 t_2\right)^{-1}$

$$p = \frac{2.6 \cdot 10^{-22} \cdot 0.1}{\pi \cdot (3 \cdot 10^{-9})^2}\left(\frac{0.4}{9.81} + 0.29 \cdot 0.35\right)^{-1} \approx 6.5 \cdot 10^{-6}\ \text{Па}$$

Ответ на второй вопрос: траектория наночастицы на начальном участке, когда действуют и сила тяжести и световое давление – наклонная прямая, далее – отрезок параболы:



Задача 4

Принцип работы некоторых типов памяти состоит в считывании состояния о заряде ячейки. На проводящую подложку наносится тонкая плёнка карбида кремния. Толщина плёнки d = 100 нм. На верхнюю поверхность пленки напыляют металлический контакт. Площадь контакта S = 4 см^2. Удельное сопротивление карбида кремния ρ = 10^7 Ом·м, диэлектрическая проницаемость ε = 10. $\varepsilon_0 = 8 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Какое напряжение возникнет между контактами, если на напыленный контакт поместить заряд q = 400 нКл? (5 **баллов**)

Найдите максимальный ток утечки заряда. (3 **балла**)

Решение:

Ячейка представляет собой плоский конденсатор.

Напряженность электрического поля, создаваемая зарядом на одной обкладке:

$E = \frac{q}{2S\varepsilon\varepsilon_0}$. В 2 раза меньше, чем в плоском конденсаторе, когда обе обкладки заряжены.

Напряжение найдем, полагая поле однородным

$$U = Ed = \frac{qd}{2S\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{400 \cdot 10^{-9}\ Кл\, 100 \cdot 10^{-9}\ м}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ м^2\, 10 \cdot 8 \cdot 10^{-12}\ Ф/м} = 0{,}625 В$$

Сопротивление постоянному току:

$$R = \rho \frac{d}{S} = 10^7 \frac{Ом \cdot м \cdot 100 \cdot 10^{-9} м}{4 \cdot 10^{-4} м^2} = 2500 Ом$$

Максимальный ток утечки найдем по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{q}{2\rho\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{400 \cdot 10^{-9} Кл}{2 \cdot 10^7 Ом \cdot м 10 \cdot 8 \cdot 10^{-12} Ф/м} = 0{,}25 мА$$

Со временем заряд на обкладке будет уменьшаться, будет уменьшаться и ток. Ток максимален в начальный момент времени.

Задача 5

Недавно был предложен оригинальный метод создания идеально сферических наночастиц, названный лазерной печатью. Суть метода состоит в облучении тонкой пленки исходного материала (например, металла) фемтосекундным лазерным импульсом (см. рис. 1). Вследствие короткой длительности импульса происходит локальный нагрев и расплавление материала пленки с последующим формированием сферической наночастицы (см. рис. 2а). При правильном подборе энергии лазерного импульса можно добиться отрыва образовавшейся наночастицы от исходной пленки и ее переноса на прозрачную приемную подложку (см. рис. 1 и рис. 2б).

Используя рисунок 2, оценить минимальную энергию лазерного импульса, необходимую для осуществления переноса сформированной золотой наночастицы диаметром 200 нм на прозрачную приемную подложку, расположенную над пленкой на расстоянии Δz = 10 мкм (**8 баллов**). Плотность золота 19.3 г/см^3, удельная теплота плавления – 67 кДж/кг, удельная теплоемкость – 129 Дж/(кг·К), температура плавления – 1064 ºС. Эксперимент проводится в вакууме, начальная температура золотой пленки 300 К.

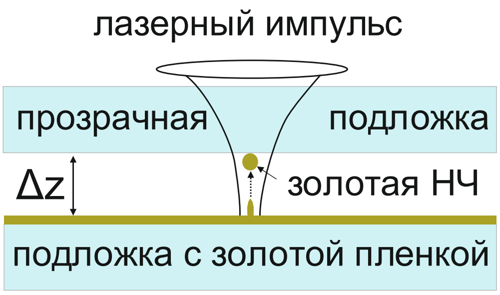


Рисунок 1. Схема метода лазерной печати.

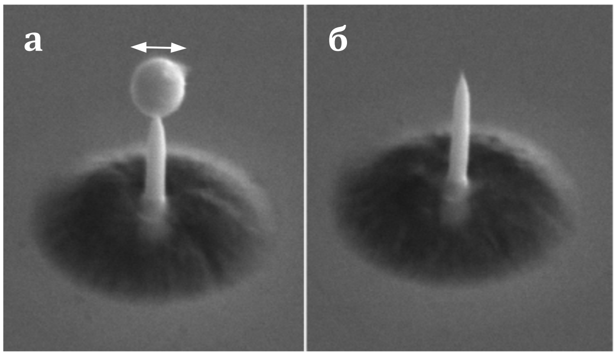


Рисунок 2. Микрофотографии поверхности золотой пленки до (а) и после (б) переноса наночастицы.

Решение:

Из рисунка 2 можно оценить диаметр расплавленной области как равный примерно пяти диаметрам наночастицы, т.е. ~ 1 мкм. Будем считать, что эта область представляет собой полушар объемом:

$V_{\text{полушара}} = \frac{2}{3}\pi R^3_{\text{полуш.}}$, где $R_{\text{полуш.}} = 500$ нм.

Следовательно, масса золота, которую необходимо нагреть и расплавить:

$m_{\text{полуш.}} = \rho V_{\text{полуш.}} = \rho\frac{2}{3}\pi R^3_{\text{полуш.}}$.

Необходимое для этого тепло:

$Q = (c\Delta T + \lambda)m_{\text{полуш.}}$, где $\Delta T = T_{\text{плавл}} - T_{\text{нач}} = 1337 - 300 = 1037$ К.

Энергия лазерного импульса W будет расходоваться на нагрев и плавление золота, а также на преодоление силы тяжести при переносе наночастицы. Эта энергия будет минимальна в случае, когда скорость переносимой наночастицы будет равна нулю в момент касания приемной подложки. Таким образом, в силу закона сохранения энергии, предполагая локальный нагрев только расплавляемой области и пренебрегая затратами энергии на отрыв наночастицы от поверхности:

$$W_{min} = Q + m_{\text{НЧ}}g\Delta z = (c\Delta T + \lambda)\rho V_{\text{полуш.}} + \rho V_{\text{НЧ}}g\Delta z = \rho\left((c\Delta T + \lambda)\frac{2}{3}\pi R^3_{\text{полуш.}} + \frac{4}{3}\pi R^3_{\text{НЧ}}g\Delta z\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi\rho\left((c\Delta T + \lambda)R^3_{\text{полуш.}} + 2R^3_{\text{НЧ}}g\Delta z\right)$$

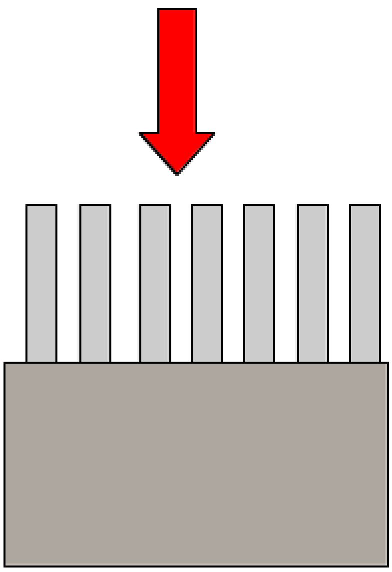
$$W_{min} = \frac{2}{3}\cdot 3.14\cdot 19300\frac{кг}{м^3}\left(\left(129\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\cdot 1037\text{К} + 67000\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right)\cdot(5\cdot 10^{-7}\text{м})^3 + 2\cdot(1\cdot 10^{-7}\text{м})^3\cdot 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right.$$

$$\left.\cdot 10^{-5}\text{м}\right) == \frac{2}{3}\cdot 3.14\cdot 19300\,(2.5\cdot 10^{-14} + 2\cdot 10^{-25}) \approx 1\cdot 10^{-9}\text{Дж} = 1\text{ нДж}.$$

Вторым слагаемым в скобках, а именно, изменением потенциальной энергии переносимой наночастицы, можно пренебречь в силу его малости по сравнению с затратами энергии на разогрев и плавление пленки.

Более сложные задачи

Задача 6.



На массив вертикальных полупроводниковых нанонитей, выращенных на подложке (см. рис.), падает монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль нитей, имеющих диаметр D = 100 нм. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна $\boldsymbol{E}$ = 10^4 В/м. При какой частоте электромагнитной волны электроны проводимости будут испытывать столкновения со стенками? Длина свободного пробега электронов проводимости превышает диаметр нанонити. $\varepsilon_0 = 8\cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м, заряд электрона $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9.1\cdot 10^{-31}$ кг, ε = 16, μ = 1. Дисперсию диэлектрической проницаемости не учитывать. (**10 баллов**)

Рассчитать амплитуду вектора индукции магнитного поля волны (**2 балла**).

Оценить максимальное смещение электронов внутри нанонити под действием магнитного поля вдоль вертикали при найденной частоте волны. (**8 баллов**)

Решение:

Заряды будут колебаться поперек нитей (в данном случае горизонтально) за счет присутствия переменного электрического поля в электромагнитной волне.

По 2-ому закону Ньютона:

$ma\cos(\omega t) = e\frac{E}{2\varepsilon}\cos(\omega t)$, где учтено, что поле внутри нити меньше в 2ε.

Коэффициент 2 появляется из-за анизотропии формы.

Свободные электроны колеблются гармонически под действием волны. При высокой частоте электроны почти не смещаются от положения равновесия, а с уменьшением частоты смещение увеличивается. Амплитуда смещения в ω^2 раз отличается от амплитуды ускорения: $a = \omega^2\frac{L}{2}$

Поэтому частота при которой амплитуда смещения электронов сравняется с радиусом нити:

$$\omega = \sqrt{\frac{2eE}{2\varepsilon mL}} = \sqrt{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,Кл\,10^4\,В/м}{16\cdot 9\cdot 10^{-31}\,кг\,100\cdot 10^{-9}\,м}} \approx 3\cdot 10^{10}\,рад/с$$

Из условия равенства плотностей энергии электрического и магнитного полей в волне следует:

$$B = \frac{E}{c} = \frac{4\cdot 10^4\,В/м}{3\cdot 10^8\,м/с} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-4}\,Тл, \text{ где } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$ — скорость света в среде.

Учет влияния магнитного поля позволит нам оценить вертикальное смещение электронов. В общем случае траектория имеет сложный вид, но максимальную оценку можно получить, зная максимальное значение силы Лоренца, которая искривляет траекторию электронов.

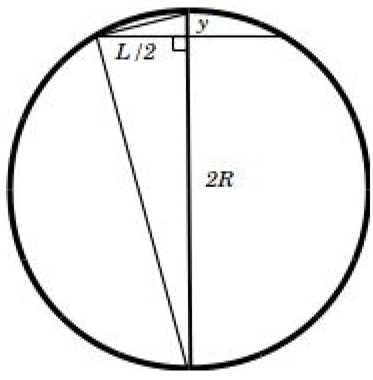
Сила Лоренца определяет центростремительное ускорение:

$ma = evB\sin(90^o)$

По 2-ому закону Ньютона:

$m\frac{v^2}{R} = evB$

Радиус кривизны орбиты:



$R = \frac{mv}{eB}$

Движение будет носить более сложный характер, чем движение по окружности, но оценить максимальное смещение можно, приняв, что магнитное поле искривляет траекторию. А за радиус кривизны взять найденную величину R.

Из рис. видно, что два прямоугольных треугольника подобны, поэтому:

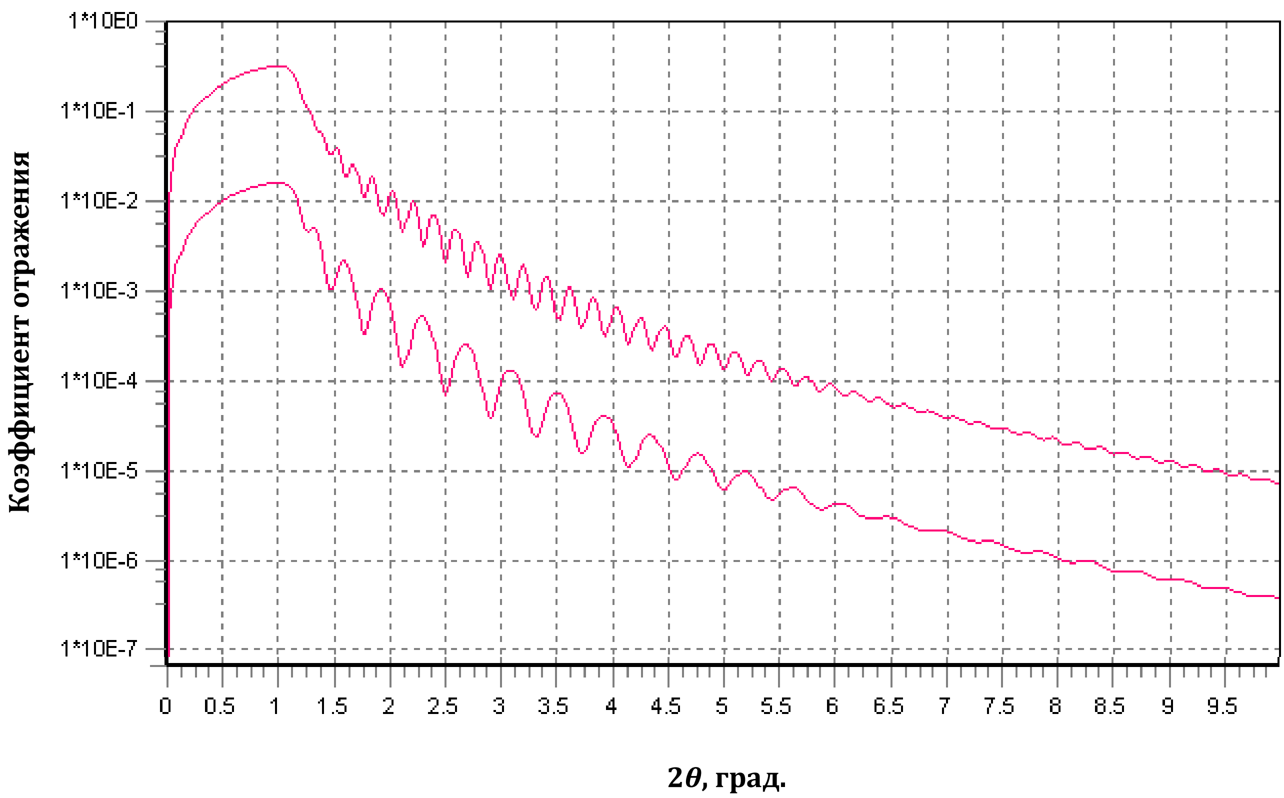
$$y = \frac{(L/2)^2}{2R} = \frac{\omega L^2}{8c} = \frac{3 \cdot 10^{10}\ рад/c (10^{-7}\ м)^2}{8\frac{3}{4}10^8\ м/c} \approx 0,5 \cdot 10^{-12}\ м = 0,0005 нм \ll L\,.$$

Где учтено, что амплитуда скорости при колебаниях: $v = \frac{\omega \cdot L}{2}$

Таким малым смещением можно пренебречь.

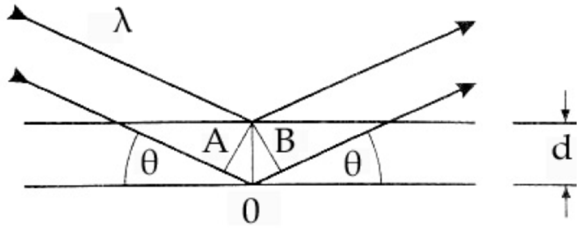
Задача 7

Большая энергия (малая длина волны) квантов синхротронного излучения обуславливает его применение для определения толщины тонких пленок. На рисунке приведены угловые зависимости коэффициентов отражения синхротронного излучения для двух пленок различной толщины. Известно, что толщина более тонкой пленки равна 10 нм. Пользуясь графиками, оцените толщину второй пленки (**7 баллов**) и длину волны используемого излучения (**7 баллов**). Какова наименьшая толщина тонкой пленки, которую можно измерить с помощью такой методики? (**6 баллов**). При оценках учесть, что коэффициенты отражения отложены в зависимости от удвоенного угла между падающим излучением и поверхностью пленки, выраженного в градусах.



Решение:

Наблюдаемое на графиках чередование максимумов и минимумов коэффициента отражения вызвано интерференцией синхротронного излучения в тонкой пленке. Условие максимума интерференции можно определить, посчитав разность хода АОВ для двух параллельных лучей (см. рис.):



$$\Delta = 2d \sin\theta$$

Максимум в отражении будет наблюдаться при равенстве этой разности хода целому числу длин волн синхротронного излучения:

$$\Delta = n\lambda$$

Т.к. порядок интерференции n не известен, нужно рассмотреть два соседних максимума, для которых порядок будет отличаться на 1:

$$2d \sin\theta_1 = n\lambda$$

$$2d \sin\theta_2 = (n+1)\lambda$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем:

$$2d\,(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = \lambda$$

Из последнего уравнения следует, что чем меньше толщина пленки d, тем больше период наблюдаемой интерференционной картины. Таким образом, более тонкой пленке соответствует нижний из приведенных графиков. Для более точной оценки периода лучше выбрать пики, отстоящие друг от друга на несколько порядков и совпадающие в максимуме с линиями сетки, например, пик при $2\theta_1 = 3.5°$ и пик при $2\theta_9 = 7°$, разница между которыми составляет 8 порядков. Тогда период интерференционной картины для нижнего графика:

$$\Delta\theta = \frac{7/2 - 3.5/2}{8} \approx 0.22°$$

Выберем теперь два произвольных соседних максимума и определим для них θ_1 и θ_2: если $\theta_1 = 1.75°$, то $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta = 1.97°$, откуда, подставляя известную толщину $d_1 = 10$ нм, для длины волны синхротронного излучения получаем:

$\lambda = 2d_1\,(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \approx 0.077$ нм (**ответ на второй вопрос**)

Аналогично оценим период интерференционной картины для второй пленки:

$\Delta\theta = \frac{3/2-2/2}{5} \approx 0.1°$. Выберем $\theta_1' = 1.5°$, тогда $\theta_2' = 1.6°$, откуда ее толщина:

$d_2 = \frac{\lambda}{2(\sin\theta_2' - \sin\theta_1')} \approx 22$ нм (**ответ на первый вопрос**)

Для ответа на третий вопрос, считая длину волны фиксированной, в общем условии максимума интерференции:

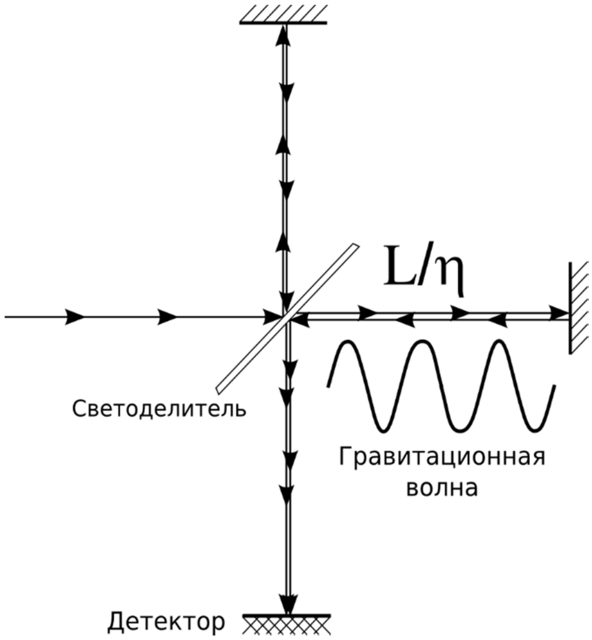
$$2d \sin\theta = n\lambda$$

следует положить $n = 1$ и, учитывая, что $\sin\theta \leq 1$ (нормальное падение), получаем:

$\frac{\lambda}{2d} \leq 1$, откуда $d \geq \frac{\lambda}{2}$, что в условиях данной задачи дает: $d \geq 0.04$ нм.

Однако для более точной оценки следует учесть, что синхротронное излучение хорошо отражается только при малых углах θ, что проявляется в быстром уменьшении коэффициента отражения с ростом θ (см. график). Поэтому на практике диапазон доступных углов можно считать ограниченным значением $2\theta_{max} \approx 10°$, т.е. $\theta_{max} \approx 5° \approx 0.09$ рад. Тогда $\sin\theta \leq 0.09$, откуда $d \geq \frac{\lambda}{2\cdot 0.09}$ или $d_{min} = 5.5 \cdot \lambda \approx 0.4$ нм (**ответ на третий вопрос**).

Задача 8



Для обнаружения гравитационных волн в Хэнфорде (США) учёные построили гигантский интерферометр Майкельсона с длиной плеч L = 4 км. Луч света мощностью P = 40 Вт с длиной волны λ = 1 мкм разделяется с помощью светоделительной пластинки на два когерентных пучка, которые попадают на детектор с равными интенсивностями, но в противофазе. В момент регистрации гравитационной волны происходит искривление пространства-времени, в результате чего одно из плеч интерферометра укорачивается в $\eta = 1 + 10^{-21}$ раз. Найдите интенсивность света на детекторе I, если известно, что лучи сфокусированы в световое пятно радиусом r = 1 мкм.

Решение:

Найдем разность хода двух волн:

$$\Delta = 2\frac{1-\eta}{\eta}L \approx 2(1-\eta)L = 8 \cdot 10^{-18}\text{м} \tag{1}$$

Теперь посчитаем разность фаз для двух волн:

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = 5 \cdot 10^{-11} \tag{2}$$

Интенсивность можно вычислить, пользуясь волновым представлением для пучков:

$$I(t) = I_0\sin(\frac{2\pi c}{\lambda}t) - I_0\sin(\frac{2\pi c}{\lambda}t + \Delta\phi) = 2I_0\sin(\frac{\Delta\phi}{2})\cos(\frac{2\pi c}{\lambda}t + \frac{\Delta\phi}{2}) \tag{3}$$

Отсюда:

$$I = I_0 \cdot \Delta\phi \tag{4}$$

Разность фаз, как видно, чрезвычайно мала, поэтому можно вычислить интенсивность приближённо:

$$I = \frac{(P/2)\Delta\phi}{\pi r^2} = \frac{\pi(1-\eta)LP}{\pi r^2 \lambda} = \frac{42 \cdot 5 \cdot 10^{-11}}{10^{-12} \cdot 3.14} = 320\ \text{Вт/м}^2 \qquad (5)$$