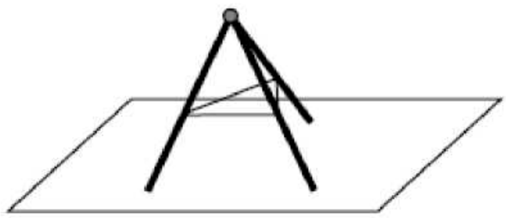
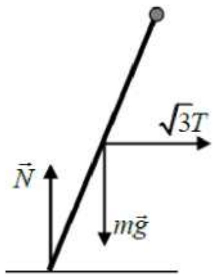
Олимпиада «Физика управляет миром» 2015-2016 уч. год.

Теоретический тур

11 класс
(решения)

Задача 1.





Три одинаковых стержня массой соединены концами сферическим шарниром (разрешающим каждому стержню вращаться вокруг себя в произвольной плоскости). Противоположными концами стержни опираются на гладкую плоскость. Середины стержней связаны нитями, длины которых в два раза меньше длин стержней. Определить натяжение нитей.

Решение.

Очевидно, угол между стержнями будет равен 60° (так как нити прикреплены к серединам стержней и их длина равна половине длина стержня, то треугольник, составленный из нити и двух частей стержней от точек крепления нитей до шарнира - равносторонний). Кроме того, равносторонним является треугольник из трех нитей.

Рассмотрим условие равновесия каждого стержня. На него действуют (см. рисунок): сила тяжести, две силы натяжения нитей - их сумма равна по величине $\sqrt{3}T$, (где T - сила натяжения каждой нити) и направлена к центру треугольника, составленного из нитей, сила реакции поверхности *N*, сила реакции шарнира (на рисунке последняя сила не показана). Используем условие равенства нулю суммы моментов этих сил относительно шарнира. Но сначала найдем плечи всех сил. Так как треугольник на поверхности, вершинами которого являются точки опоры стержней о поверхность. - равносторонний со стороной l (длина каждого стержня), то плечо силы реакции относительно шарнира равно $\sqrt{3}l/3$, плечо силы тяжести - $\sqrt{3}l/6$. плечо равнодействующей сил натяжения - $l/\sqrt{6}$.

Поэтому условие моментов дает

$$N\frac{\sqrt{3}l}{3} = mg\frac{\sqrt{3}l}{6} + \sqrt{3}T\frac{l}{\sqrt{6}}$$

А поскольку $N = mg$ (поскольку в вертикальном направлении на систему действуют три силы реакции и сила тяжести 3mg). из условия равновесия находим

$$T = \frac{mg}{\sqrt{6}}$$

Задача 2

Имеются две трубы, площади сечений которых относятся как $5/2$. Трубы состыкованы и в них вставлены соединенные стержнем поршни, перекрывающие трубы герметично. Между поршнями находится идеальный газ. При температуре T_0 поршни находятся на одинаковых расстояниях от стыка труб. Объем газа между поршнями V. Газ охлаждают до температуры $T_0/3$. Какими будут давление и объем газа между поршнями. Атмосферное давление p_0.

Решение. Рассмотрим условие равновесия поршней. Внешними силами по отношению к системе двух поршней, соединенных стержнем являются силы, действующие на них со стороны атмосферного воздуха, и воздуха между поршнями. Условие равновесия этой системы дает:

$$p_0(5S/2) = S(p_0 - p) + p_0 S \qquad (1)$$

где S и $5S/2$ - площади сечений труб, p_0 и p - атмосферное давление и давление газа в трубах. Из формулы (1) имеем

$$(p_0 - p)(5S/2) = S(p_0 - p) \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что поршни в такой трубе (из соединенных труб разных поперечных сечений) находятся в равновесии только в том случае, когда давление газа в трубах равно атмосферному. Это значит, что при охлаждении газа с ним происходит изобарический процесс с уменьшением объема. Для этого поршни должны перемещаться влево. Но объем газа между поршнями не может стать меньше, чем

$V_{min}=Sl$

(где l - длина стержня, связывающего поршни), когда большой поршень подойдет вплотную к стыку труб. При этом объем газа в начальном состоянии равен

$$V_{нач} = \frac{l}{2}S + \frac{l}{2}\frac{5}{2}S = \frac{7}{4}Sl$$

Таким образом, после того как температура газа уменьшится в 7/4 раза правый поршень подойдет к стыку вплотную, а давление газа будет по-прежнему равно атмосферному. При дальнейшем уменьшении температуры объем газа изменятся не сможет, поэтому с газом будет проходить изохорический процесс, в котором будут меняться температура и давление. Из закона Клапейрона — Менделеева имеем

$$\frac{p_0}{(4/7)T_0} = \frac{p_2}{(1/3)T_0}$$

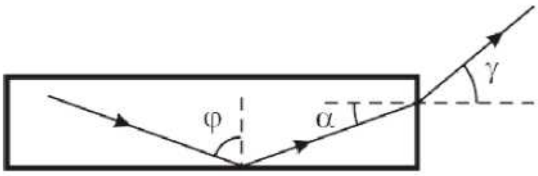
Где p_0 - конечное давление газа. Отсюда

$p_1 = p_0(7/12)$

Таким образом, новое давление газа составит 7/12 от старого, объем – 4/7.

Задача 3.

Длинная, очень тонкая прямая нить — световод — изготовлена из прозрачного материала с показателем преломления $n = \sqrt{1.25}$. Один из концов нити прижат к источнику рассеянного света. Другой конец нити размещён на расстоянии L = 7 см от расположенного перпендикулярно световоду экрана. Найти диаметр D светового пятна на экране. Считать, что диаметр световода много меньше, чем D.



Решение: Через очень длинный световод пройдут только те лучи, которые падают на границу с воздухом под углом, большим угла полного отражения. Остальные лучи будут терять энергию за счёт преломления и до конца практически не дойдут. Граница светового пятна на экране будет определяться лучами, идущими под предельным углом φ (см. рис. 17) и выходящими из торца световода (напомним, что его диаметр считается пренебрежимо малым). Для этих лучей sinφ = 1/n. С другой стороны, по закону Снеллиуса sinγ= n sinα. Отсюда, учитывая, что cosα= sin φ = 1/n, получим

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \quad => \quad \sin\gamma = n\sin\alpha = \sqrt{n^2-1} = 1/2 \quad => \quad \gamma = 30^\circ$$

Найдем теперь диаметр светового пятна:

$$D = 2Ltg\gamma = \frac{2L}{\sqrt{3}} \approx 8.1 см$$

Задача 4.

Тяжёлый клин с углом при основании, равным α = 15°, движется по горизонтальной плоскости со скоростью u (см. рис. 1). Навстречу ему со скоростью v летит лёгкий шарик. Чему должна равняться скорость v, чтобы шарик после удара о клин отскочил вертикально вверх. Удар считать абсолютно упругим, трение отсутствует.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с клином. В ней шарик летит навстречу клину со скоростью u + v. При абсолютно упругом ударе о покоящийся тяжёлый клин

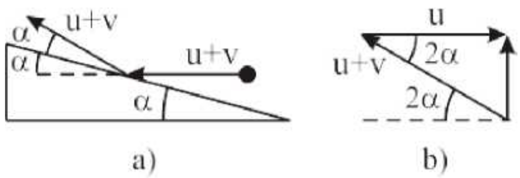


Рис. 7.

скорость шарика останется неизменной по величине, но будет направлена вверх по углом a к поверхности клина (см. рис. 7a) или, что эквивалентно, под углом 2α= 30° относительно горизонтальной поверхности.

Чтобы получить вектор скорости отскачившего мячика в лабораторной системе отсчёта, необходимо к вектору скорости, найденной в системе, связанной с клином, прибавить вектор u. Так как, по условию, результат должен быть направлен вертикально, мы получим прямоугольный треугольник (см. рис. 7b) с катетом, равным u, гипотенузой, равной u+v, и углом 2a = 30° между ними. Из указанного треугольника находим, что

$$(u+v)\cos 2\alpha = u \quad => \quad v = u\left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1\right) = u\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$$

Задача 5.

Пучок мюонов удерживается на круговой орбите при помощи магнитного поля. Масса мюона $1.88 \cdot 10^{-28}$ кг, заряд $-1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл, период полураспада 1.523 мкс. Будем пренебрегать потерями энергии на электромагнитное излучение. Вначале скорость мюонов была гораздо меньше скорости света. В этом случае оказалось, что за один период обращения распадается половина всех мюонов. Определите величину индукции магнитного поля. Далее скорость мюонов увеличили, и она стала сравнима со скоростью света в вакууме. При этом индукция магнитного поля осталась прежней. Как изменится доля распавшихся за один период обращения мюонов?

Решение

Для краткости рассмотрим сразу релятивистский случай. По второму закону Ньютона запишем:

$$\frac{ma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = qvB .$$

Для движения по окружности имеем:

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad v = \frac{2\pi r}{T} .$$

Подставляя в первое выражение, получим

$$\frac{2\pi}{T}\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = qB .$$

В системе отсчета, связанной с мюоном, мюон совершает один оборот за время, равное периоду полураспада $T_{1/2}$, тогда в лабораторной системе отсчета период обращения равен

$$T = \frac{T_{1/2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Тогда, подставляя в предыдущее равенство, получим

$$B = \frac{2\pi m}{qT_{1/2}} .$$

B=4.85 мТл.

Как видно, полученный результат не зависит от того какой случай рассматривается, релятивистский или нерелятивистский. Доля мюонов, распадающихся за один период обращения, не связана со скоростью их движения, т.к. в релятивистском случае период обращения и время жизни изменяют в одинаковое число раз.