

## Второй тур

### 10 класс

56. У Андриюши есть 100 камней разного веса, причем он различает камни по внешнему виду, но не знает, сколько именно весит каждый камень и как они упорядочены по весу. Андриюша может вечером положить на стол ровно 10 камней, а ночью домовой разложит их по возрастанию веса. Но если в доме живёт ещё и барабашка, то под утро он обязательно поменяет какие-то два из разложенных камней местами. Всё это известно Андриюше, но он не знает, есть ли в доме барабашка. Сможет ли он это узнать?

57. Найдите все натуральные числа, такие что сумма квадратов их пяти наименьших делителей — точный квадрат.

58. На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  отмечена точка  $E$ . Известно, что  $\angle CAD = \angle ADC = \angle ABE = \angle DBE$ . Докажите, что треугольник  $BCE$  — равнобедренный.

59. Дано натуральное число  $m$ . Докажите, что при некотором натуральном  $k$  имеет место неравенство

$$1 \leq \frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + (k-1)^m}{k^m} < 2.$$

60. Из точки  $O$  выходят лучи  $\ell$ ,  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ , угол между  $\ell$  и  $\ell_2$  острый, луч  $\ell_1$  лежит внутри этого угла. На луче  $\ell$  лежит фиксированная точка  $F$  и произвольная точка  $L$ . Через точки  $F$  и  $L$  проходят окружность, касающаяся луча  $\ell_1$  в точке  $L_1$ , и окружность, касающаяся луча  $\ell_2$  в точке  $L_2$ . Докажите, что окружность  $FL_1L_2$  проходит через некоторую точку, отличную от точки  $F$  и не зависящую от выбора точки  $L$ .

61. В социальной сети у каждого пользователя не более десяти друзей (отношение «дружба» симметрично). Сеть *связна*: если, узнав интересную новость, пользователь начинает рассылать её своим друзьям, те своим и так далее, то в итоге новость узнают все пользователи. Докажите, что администрация сети может разбить пользователей на группы так, чтобы выполнялись следующие условия:

- (i) каждый состоит ровно в одной группе;
- (ii) каждая группа связна в указанном выше смысле;
- (iii) одна из групп содержит от 1 до 100 членов, а каждая из остальных от 100 до 900 членов.

62. В экзамене 25 тем, по каждой из которых заготовлено 8 вопросов. В билет входят 4 вопроса по разным темам. Можно ли заготовить 50 билетов так, чтобы каждый вопрос встречался в них ровно один раз и для любых двух тем был билет, в котором есть вопросы по ним обеим?