

Условия задач 2019-2020 учебного года.
Первый тур

10 класс

19. Ненулевые вещественные числа a , b и острый угол β таковы, что число $\cos \beta$ является корнем уравнения $4ax^2 + bx - a = 0$, а число $\sin \beta$ — корнем уравнения $4ax^2 - bx - 3a = 0$. Чему может быть равно β ? Не забудьте проверить, что найденные значения β подходят, и доказать, что других значений нет.

20. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Известно, что $AO \cdot BO < CO \cdot DO$. Докажите, что $\angle BCD + \angle CDA < 180^\circ$.

21. Существуют ли такие правильные дроби a , b и c , что число $4ab^2c^3/3$ натуральное? (Напомним, что правильной дробью называется число вида m/n , где $m < n$ — натуральные числа.)

22. См. задачу 17.

17. Антон положил на клетчатую доску 46×101 несколько бумажных крестиков, изображенных на рисунке (каждый крестик покрывает ровно 5 клеток доски). Оказалось, что для каждой клетки доски сумма попавших на неё чисел не превосходит 2. Какое наибольшее количество крестиков мог положить Антон?



23. В межгалактическом турнире по шахматам приняло участие n шахматистов, представляющих несколько планет. Каждые два участника сыграли между собой по одной партии. Оказалось, что число партий, в которых соперники представляли одну планету, равно числу партий, в которой соперники представляли разные планеты. Сколько существует значений $n \in [150\,000, 200\,000]$, для которых это возможно?