49. Ответ: 2 решения. В качестве примера подойдут, например, 5 функций $-x-1$ и 5 функций $x-1$.

Предположим, что это уравнение имеет три корня: $u < v < w$. В точке v одна из линейных функций a_ix+b_i равна нулю. С другой стороны, ее значения в точках u и w не провосходят нуля. Но такая линейная функция может быть лишь константой, что запрещено условием.

50. Если произведение $(a^2+1)(b^1+1)$ делится на c^2+1, то c^2+1 можно разложить в произведение двух таких множителей XY, что a^2+1 кратно X, а b^2+1 кратно Y. (Для этого достаточно, например, положить $X=(a^2+1,c^2+1)$.) Будем считать, не умаляя общности, что $X \geqslant Y$, тогда $Y \leqslant c$.

Пусть u — остаток от деления a на c^2+1, а v — остаток от деления b на Y. Тогда $u \leqslant c^2$, $v < Y \leqslant c$, откуда $uv < c^3$. Легко понять, что u^2+1 делится на X, но не делится на c^2+1, и v^2+1 делится на Y, но явно не делится на c^2+1. Следовательно, произведение $(u^2+1)(v^2+1)$ делится на $XY=c^2+1$. Таким образом, u, v, c — тройка, вызывающая интерес.

51. Обозначим через α угол CAD и равные ему углы. Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно прямой AD. Тогда $ACDC'$ — ромб. Напишем сумму углов треугольника ADC': $180^\circ = \angle AC'D + 2\alpha = \angle AC'D + \angle ABD$. Отсюда заключаем, что четырехугольник $ABDC'$ вписанный. Тогда $\angle ADC' = \angle ABC' = \alpha = \angle ABE$. Значит, прямая BC' проходит через точку E. В силу симметрии $EC = EC'$ и тогда $BE+CE = BC'$. На хорду AD опирается острый вписанный угол ABD, величина которого равна 2α, а на хорду BC' — угол $C'DB$, величина которого меньше $\angle C'DC = 2\alpha$. Следовательно, $BC < AD$.

52. Ответ: Два столбца. Для того, чтобы оставить как минимум два столбца, Леша должен для каждой строки называть цвет, который не встречается в первых двух её клетках. При такой его стратегии первые два столбца не будут вычеркнуты.

Заметим теперь, что $300 = C_{25^2}$. Пользуясь этим наблюдением, сопоставим каждой строке свою пару столбцов. Пусть Костя покрасит в каждой строке клетки в соответствующих двух столбцах в 1-й и 2-й цвет, а остальные клетки — в третий цвет. Если Леша в какой-то строке выберет 3-й цвет, то этим сразу вычеркнет всё, кроме двух столбцов. Если же Леша всё время будет выбирать 1-й или 2-й цвет, то останется максимум один столбец! В самом деле, пусть сохранились какие-то два столбца. Поскольку существует строка, в которой клетки эитх столбцов покрашены в 1-й и 2-й цвета, один из этих столбцов должен быть уничтожен выбором Леши для этой строки!

53. Докажем, что серединные перпендикуляры к отрезкам YZ, YT и YX пересекаются в одной точке — центре искомой окружности.

Из условия сразу следует, что $\angle ABZ = 90\circ$. Кроме этого, если I — центр вписанной окружности, то $\angle IBI_a = 90^\circ$. Из этих равенств сразу следует, что $\angle ZBI_a = \angle ABI = \angle ABC/2$. Поскольку прямая BI_a — внешняя биссеткриса угла ABC, угол $CBI_a = 90 - \angle ABC/2$, и поэтому $\angle YI_aB = \angle XI_aB = \angle ABC/2$.

Таким образом, $BZ = IaY$ и $\angle ZBI_a = \angle YI_aB$. Это значит, что четырехугольник BI_aYZ — равнобедренная трапеция. Поэтому серединный перпендикуляр к отрезку YZ совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку BI_a. Последний по лемме о трезубце проходит через середину W дуги BC описанной окружности треугольника. Аналогично, через W проходит и серединный перпендикуляр к отрезку YT.

Осталось понять, почему через W проходит серединный перпендикуляр к отрезку XY. Отметим на продолжении отрезка I_aX за точку X такую точку I', для которой $XI' = r$. Иными словами, $II'I_a$ — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине I'. По уже упоминавшейся лемме о трезубце, точка W — середина его гипотенузы II_a. Следовательно, она лежит на серединном перпендикуляре к $I'I_a$, совпадающем с серединным перпендикуляром к отрезку XY.

54. Ответ: не удастся. Сопоставим каждой точке (a,b) число $f(a,b) = a^2+b^2$. Несложно проверить, что $f(b,a) = f(a,b)$ и $f(a-b,a+b) = 2f(a,b)$, и $f(ad+bc, 4ac-4bd) \equiv f(a,b)f(c,d) \pmod 5$. У каждой из исходной точек величина f не кратна 5. Умножая эти величины на 2 и перемножая их, невозможно получить величину, кратную пяти. Тем не менее для точки, лежащей на прямой $y=2x$ эта величина $y^2+x^2 = 5y^2$ делится на 5.

55. Назовем *весом вершины* A сумму чисел на всех выходящих из нее ребрах; обозначим это число через $v(A)$. Заметим, что сумма весов всех вершин графа ровно в два раза больше суммы чисел на всех его ребрах. Достаточно доказать, что сумма всех весов не меньше -20000.

Из условия сразу следует, что сумма весов любых двух смежных вершин больше или равна 0.

Выберем в нашем графе максимальное паросочетание, пусть в нём задействовано k рёбер. Сумма весов всех $2k$ их вершин больше или равна 0. Осталось доказать, что сумма весов остальных $400-2k$ вершин больше или равна -20000. Пусть S — множество всех этих вершин.

Ясно, что все вершины S попарно не смежны (иначе максимальное паросочетание можно было бы увеличить). Поэтому сумма их весов равна сумме чисел на всех ребрах, соединяющих множество S с вершинами максимального паросочетания.

Рассмотрим одно из ребер UV, входящее в максимальное паросочетание. Несложно проверить, что из вершин U и V в множество S может вести суммарно не более $|S| = 400-2k$ ребер. Из этого следует, что между вершинами паросочетания и множеством S есть не более $k\cdot(400-2k) = 2k(200-k) \leqslant 2\cdot 100\cdot 100 = 20000$ ребер. На каждом из них стоит число 1 или -1, поэтому сумма чисел на этих рёбер не меньше, чем -200000, что и требовалось доказать.