Решения задач второго (заключительного) тура 2019-2020 учебного года.

42. Пусть в клетке с координатами (m, n) стоит число $a_{m,n}$, и пусть все диагональные числа равны d. Заметим, что $a_{m,n} + a_{n,m} = a_{m,m} + a_{n,n} = 2d$. С другой стороны, по условию $a_{m,n} \leqslant d$ и $a_{n,m} \leqslant d$, откуда $2d = a_{m,n} + a_{n,m} \leqslant 2d$, и равенство возможно только при $a_{m,n} = a_{n,m} = d$.

43. Ответ: 5,5. Пример: отрезки $[2{,}5, 3{,}5]$, $[4, 5]$ и $[7, 8]$.

Рассмотрим такое число x, что $x \in [a, a+1]$ и $2x \in [b-1, b]$. Тогда $2a+2 \geqslant 2x \geqslant b-1$, откуда $2a+3 \geqslant b$. Далее, рассмотрим какой-нибудь отрезок $[c, c+1]$, отличный от $[a, a+1]$ и $[b-1, b]$. Тогда $a < c < b-1$. Рассмотрим такие числа y и z, что $y \in [a, a+1]$, $2y \in [c, c+1]$; $z \in [c, c+1]$, $2z \in [b-1, b]$. Тогда $c+1 \geqslant 2y \geqslant 2a$ и $b \geqslant 2z \geqslant 2c$. Таким образом, $2a+3 \geqslant b \geqslant 2c \geqslant 2(2a-1) = 4a-2$, откуда $a \leqslant 2{,}5$. Следовательно, $b - a \leqslant 2a + 3 - a = a + 3 \leqslant 5{,}5$.

44. Отложим на продолжении AC за точку C точку D' так, что $DA = CD'$. Тогда $BD+CF = BD'+CE = BD' + CD' + D'E = FB + BD' + D'E > EF$.

45. Ответ: 7 ходов. Нарисуем все диагонали 129-угольника, соединяющие вершины через одну. Получится цикл длины 129, мы будем называть вершины *соседними*, если они соседние в этом цикле. Итак, теперь Вася каждым ходом должен отмечать вершину, соседнюю с отмеченной Петей. Будем удалять отмеченные вершины, тогда после первой пары ходов наш цикл станет цепочкой длины 127. После каждой пары ходов мы будем рассматривать оставшиеся цепочки из неотмеченных вершин. Длина цепочки — это количество вершин в ней, цепочка называется нечетной, если содержит нечетное число вершин.

Стратегия Васи: несложно понять, что Вася может сделать так, чтобы после k-й пары ходов среди оставшихся цепочек была ровно одна нечетная и ее длина была бы не меньше $2^{8-k} - 1$. Таким образом, он сможет сделать не менее 7 ходов.

Стратегия Пети: каждый раз отмечать середину единственной нечетной цепочки. Вася отметит соседнюю точку, и после их пары ходов будет ровно одна нечетная цепочка, и длина ее после k пар ходов, будет равна в точности $2^{8-k} - 1$.

46. Пусть $k > 100$ — такое число вида $4\ell + 2$, что $10^k > n$. Отметим, что $10^k \equiv -1 \pmod{101}$. Отсюда несложно вывести, что после приписывания двух последовательных k-значных чисел остаток по модулю 101 увеличится на 1. Поскольку таких пар будет больше 101, за 101 таких пар ходов саша обязательно получит число, кратное 101.

47. Построим на сторонах AP и PB треугольника APB сторону правильные треугольники APX и BPY. Треугольник AXC получается из треугольника APB поворотом на 60° с центром в A, значит, эти треугольники равны. Тогда $XC = PB = PY$. Аналогично, $CY = AP = XP$. Следовательно, четырехугольник $PXCY$ — параллело- грамм. Далее, поскольку $\angle PBQ = 30^\circ$, BQ является биссектрисой правильного треугольника BPY. Следовательно, BQ — серединный перпендикуляр к PY и тогда $QP = QY$. Аналогично, $QP = QX$. Поскольку по условию $QP = QC$ получаем, что точка Q равноудалена от всех вершин параллелограмма $PXCY$. Такой точкой может быть только точка пересечения его диагоналей. Но тогда диагонали параллелограмма $PXCY$ равны, следовательно, $PXCY$ — прямоугольник. Выше мы уже доказали, что отрезки BQ и AQ перпендикулярны сторонам этого прямоугольника. Таким образом, $\angle AQB = 90^\circ$.

48. Ответ: Дима не сможет это сделать. Обозначим данный 1000-угольник через M. Пусть точка B внутри многоугольника M соединена с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 (против часовой стрелки). Если A_iA_{i+1} — это не сторона 1000-угольника M, то можно очень близко к ломаной A_iBA_{i+1} провести ломаную A_iA_{i+1}, которая не пересекается ни с одной из проведенных ломаных. Все такие ломаные можно провести одновременно так, чтобы они не пересекали сторон M, друг друга и проведенных ранее ломаных. Таким образом, точка B окажется внутри цикла Z_B, состоящего из четырех непересекающихся рёбер-ломаных, который, очевидно, не может содержать других отмеченных точек. (Любая другая точка B' внутри Z_B может быть соединена лишь с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4. Но обе точки B и B' внутри Z_B невозможно соединить непересекающими друг друга ломаными со этими четырьмя вершинами цикла.)

Предположим, что Дима смог отметить 500 точек и провести нужные ломаные. Построим описанные выше 4-циклы для всех отмеченных точек. Проведем в M диагонали (отрезки), соответствующие сторонам каждого цикла, они, очевидно не будут пересекать друг друга. Действительно, диагонали XY и ZT пересекают друг друга, если и только если точки идут в циклическом порядке X, Z, Y, T, но тогда внутри многоугольника M невозможно провести непересекающиеся ломаные XY и ZT.

Проведенные диагонали разбивают многоугольник M на четырехугольники. Разобьем каждый из них диагональю на два треугольника. Проведем, если нужно, еще несколько диагоналей так, чтобы получилась триангуляция многоугольника M. Но триангуляция 1000-угольника состоит из 998 треугольников. А мы в процессе ее построения разбили 500 четырёхугольников на 1000 различных треугольников. Противоречие.