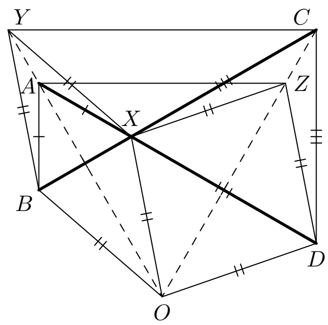
Решения задач второго (заключительного) тура 2019-2020 учебного года.

35. Десять неподвижных пассажирских вагонов занимают не более 20 рельсов. Всего имеется 21 неподвижный грузовой вагон. Если каждый из них занимает хотя бы один из этих рельсов, то найдутся два неподвижных грузовых вагона, занимающих один и тот же рельс. В противном случае найдется неподвижный вагон B, не занимающий тех же рельсов, что и неподвижные пассажирские вагоны. С другой стороны, есть вагон, стоящий на том же рельсе, что и B, и этот вагон тоже неподвижный. Значит, это грузовой вагон, и мы опять нашли рельс, на котором стоят два грузовых вагона.

36. Ответ: $n = 2$. Два нечетных числа не могут обращовывать хорошую пару. Значит, число n имеет четный делитель, и поэтому оно само четно. Но тогда у него есть две хорошие пары делителей: $(2, 1)$ и $(n, n/2)$.

37. Проведем в треугольнике ABC биссектрису CL. Точки B и D симметричны относительно этой биссектрисы, поэтому $BL = DL$. Кроме того, из равнобедренности вытекает, что $BK = BL$. Таким образом, BKL — искомый треугольник.



38. Выигрывает Дима. См. решение задачи 33.

39. Введем обозначения как на рисунке. Поскольку треугольник AXB равносторонний, все его углы равны $60°$. Точки Y, A и O лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BX, а точки C, Z и O — на серединном перпендикуляре к CX. Точки B и X симметричны относительно прямой AO, а точки O и Z — относительно прямой XD. Отсюда мы находим, что $\angle BAO = \angle XAO = 30°$, $AO = AZ$ и $\angle ZAX = \angle XAO = 30°$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике AOZ угол при вершине A равен $60°$, поэтому этот треугольник равносторонний и $AO = OZ = AZ$. Аналогично $YC = CO$ и $\angle C = 60°$ в треугольнике YCO. Поэтому этот треугольник тоже равносторонний, и $CY = YO = CO$. Итого, $AY = OY - OA = OC - OZ = CZ$.

40. Ответ: 1010. Этот ответ достигается, если числа 7 и 6 чередуются.

Можно считать, что все числа равны 6 или 7. Действительно, если число отлично от 6 и 7, то среди его соседей одна 6 и одна 7, и то же верно про соседей через один. Тогда при замене этого числа на 7 разность $C - A$ не меняется.

Теперь уменьшим все числа на 6,5 и докажем, что величина $C - A$ не изменится. Пусть сумма Саши станет равна C_1, а сумма Андрея — A_1. Если до уменьшения на каком-то отрезке стояло чсило ab, то, после того как мы уменьшили числа, на этом отрезке стоит число $(a - 6{,}5)(b - 6{,}5) = ab - 6{,}5(a + b) + 6{,}5^2$. Тогда $C - C_1 = 2S \cdot 2020 \cdot 6{,}5 - 2020 \cdot 6{,}5^2 = A - A_1$, где S — сумма всех исходных чисел. Отсюда и следует, что $C - A = C_1 - A_1$.

Теперь $C_1 - A_1 \leqslant 2020 \cdot \frac{1}{4} - 2020 \cdot \frac{-1}{4} = 1010$, поскольку после уменьшения все числа равны $\pm\frac{1}{2}$, и произведение на каждом отрезке равно $\pm\frac{1}{4}$. В частности, равенство достигается, если исходно числа 6 и 7 чередовались.

41. Нетрудно проверить, что если к натуральному числу k приписать справа два последовательных трехзначных числа, то его остаток от деления на 77 увеличится на 1. Таким образом, выписанные Олей числа при $N = 102, 104, \ldots, 998$ дают последовательные остатки от деления на 77. Их не меньше, чем 77, поэтому хотя бы одно из них на 77 делится.