Решения задач второго (заключительного) тура 2019-2020 учебного года.

29. Если мальчик получил от соседа справа k гвоздик, то он сам передал левому соседу $k+1$ гвоздику. Поскольку у каждого мальчика не более 50 гвоздик, подряд могут стоять не более 50 мальчиков. Значит, имеется не меньше трех групп подряд стоящих мальчиков. Так как всего имеется 3 девочки, это возможно, только когда имеется ровно три группы мальчиков, причем между соседними группами стоит ровно одна девочка. В частности, девочки не стоят рядом.

30. Проведем все возможные взвешивания. Фальшивый ребенок — тот, кто во всех взвешиваниях (где он участвовал) оказывался на легкой чаше.

31. Числа 6, 12, 15 и 21 являются сложными и дают все возможные остатки от деления на 4. Поэтому из любого числа $n > 23$ можно вычесть одно из этих чисел так, чтобы получилось число вида $4k+2 = 2(2k+1)$. Очевидно, это разность будет сложным числом.

32. Чтобы число ни в какой момент не делилось на 3, надо попеременно прибавлять единицы и двойки, т.е. прибавится либо $82 = 1 + 2 + \cdots + 1$, либо $83 = 2 + 1 + \cdots + 2$. Но последняя цифра могла увеличиться не более чем на 2 (от 1 к 3, или от 7 к 9), первая — не более чем на 8, а остальные — не более чем на 9. Значит, прибавили не более 82, т.е. ровно 82 и первой была единица. Но тогда исходное число должно было быть 1000000001 или 1000000007, и после первого хода оно поделится на 3.

33. Выиграет Дима. В каждом столбце разобьем клетки на пары вида $(a, a+7)$. Дима должен дополнять ход Гоши до пары, кроме случая, когда он видит 7 ноликов подряд. Ясно, что в строке Гоша выиграть не сможет. Предположим, что Гоша выиграл, поставив семь ноликов в ряд по вертикали. Заметим, что любое расположение семи ноликов подряд в столбце из 14 клеток задевает по одной клетки из каждой пары. Значит, до победного хода Гоши каждый игрок сделал в этот столбец по 6 ходов. Тогда после шестого хода Гоши в этот столбец в нем уже стояло 11 ноликов. Следовательно, в одной из его семиклеточных половин стояло 6 ноликов, и Дима следующим ходом мог выиграть, поставив седьмой нолик в эту половину (как и требует его стратегия).

34. Запишем решение на языке графов. Если степень вершины не меньше 100, назовем ее *богатой*, а если меньше 100 — *бедной*. Из условия следует, что все бедные вершины попарно смежны друг с другом.

Докажем, что каждой бедной вершине можно поставить в пару немежную с ней богатую так, что разным бедным будут соответствовать разные богатые. Пусть мы построили пары для k бедных вершин. Если еще остались бедные вершины, то $k < 100$. Возьмем очередную бедную вершину, она несмежна по крайней мере с 100 (богатыми) вершинами. Из них не более k уже поставлены в пару к какой-нибудь бедной, значит найдется хотя бы одна, еще не входящая ни в одну из пар.

В результате у нас имеется несколько несмежных пар вершин, и в каждой такой паре сумма степеней по условию не меньше 200, и еще несколько богатых вершин степени не меньше 100. Итого, сумма всех степеней не меньше чем $200 \cdot 100$, а число ребер — не меньше 10000.