63. Разность двух гипотенузных чисел имеет вид $(a^2+b^2)-(c^2+d^2) = (a^2-c^2)+(b^2 = d^2)$. Как известно, в виде разности двух квадратов, можно представить любое число, дающее от деления на 4 остаток, отличный от 2. С другой стороны, любое натуральное число легко представить в виде суммы двух чисел, дающих остатки 0, 1 и 3.

64. Ответ: 178 близоруких ладей.

Оценка. Разобьем квадрат 100×100 на центральный квадрат 22×22 и $4 \cdot 39 = 156$ прямоугольников 1×61. В каждый прямоугольник разбиения и в каждую горизонталь квадрата 22×22 можно поставить не более одной ладьи, поэтому ладей не более 178.

Пример: Поставим ладьи на клетки главной диагонали и двух, параллельных ей диагоналей, состоящих из 39 клеток. При такой расстановке между ладьями, расположенными в одном столбце или одной строке, находится ровно 60 пустых клеток, поэтому никакие две ладьи не бьют друг друга.

65. Обозначим через Ψ середину дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B. Тогда Ψ лежит на прямой BB_1. Кроме того, по лемме о трезубце точка Ψ равноудалена от точек I, A и C, поэтому Ψ является центром описанной окружности треугольника AIC и Ψ лежит на отрезке ED.

Пусть точка F' симметрична F относительно серединного перпендикуляра к DE. Очевидно, $DEF'F$ — равнобедренная трапеция, значит D, E, F', F лежат на одной окружности.

Докажем, что точка B лежит на этой же окружности. Заметим, что точка F' лежит на BB_1, поскольку Ψ равноудалена от точек B_1, F, F' и $\angle F'FB = 90°$, т. е. B_1F' — диаметр окружности с центром Ψ и радиусом ΨF. Из подобия треугольников $A\Psi B_1$ и $B\Psi A$ следует, что $\Psi B_1 \cdot \Psi B = \Psi A^2$, что равносильно равенству $\Psi F' \cdot \Psi B = \Psi D \cdot \Psi E$. Из последнего равенства следует, что точки F', B, D, E лежат на одной окружности.

66. Ответ: первая цифра после запятой равна 5.

Для начала упростим данную сумму. Каждое слагаемое запишем в виде разности

$$\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3k-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3k+3)} = \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3k-1)\cdot(3k+3)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3k+3)} - \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3k-1)\cdot(3k+2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3k+3)} = \\ = \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3k-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3k} - \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3k-1)\cdot(3k+2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3k+3)}.$$

Тогда вся сумма телескопически сократится до разности крайних слагаемых $\frac{2}{3} - \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2018}{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2019}$.

Теперь оценим вычитаемое. Заведем переменные

$$A = \frac{1\cdot 3\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2016}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2017},\qquad B = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2017}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2018},\qquad C = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2018}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2019},\qquad D = \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2019}{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot 2020},$$

$$E = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot 2020}{5\cdot 8\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2022}.$$

Мы хотим оценить величину числа C.

Поскольку $\frac{a-1}{a} < \frac{a}{a+1}$ при натуральных a, выполняются неравенства $A < B < C < D < E$, откуда $ABC < C^3 < CDE$. Подставив в эти неравенства формулы для наших чисел и сократив дроби, получим

$$\frac{1}{2019} < C^3 < \frac{2}{2022},\qquad \frac{1}{15} < \sqrt[3]{\frac{1}{2019}} < C < \sqrt[3]{\frac{2}{2022}} < \frac{1}{6},\ \text{и значит,}\qquad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} - \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2018}{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2019} < \frac{3}{5}.$$

Таким образом, первая цифра после запятой исходного числа равна 5.

67. Прежде всего обозначим середину отрезка BM через M, а окружность, проходящую через A, C_1 и M — через w.

Поскольку $BC/4 < BH/4 + CH/4$, для решения задачи достаточно доказать неравенство $B_1O_b \geqslant BH/4$ (и, аналогично, $C_1O_c \geqslant CH/4$). Это неравенство следует из удивительного факта: расстояние от точки O_b до прямой AC равно в точности $BH/4$.

Пусть точка B' симметрична вершине B относительно прямой AC. Проверим, что она лежит на окружности AC_1M. Для этого нужно доказать, что $BM \cdot BB' = BC_1 \cdot BA$. В самом деле,

$$BM \cdot BB' = BM \cdot 2BB_1 = 2BM \cdot BB_1 = BH \cdot BB_1 = BC_1 \cdot BA,$$

последнее равенство следует из вписанности четырехугольника AB_1HC_1.

Таким образом, центр O_b окружности w должен лежать на серединном перпендикуляре к ее хорде MB'. Значит, расстояние от O_b до AC равно расстоянию между этим серединным перпенидкуляром и прямой AC, то есть между серединами отрезков $B'M$ и $B'B$. Оно в два раза меньше, чем расстояние от M до B, то есть равно $BH/4$, что и требовалось.

68. Пусть простое число p входит в a_n в k-й степени. Докажем, что a_{a_n} делится на p^{kn}. Тогда утверждение задачи будет выполнено.

Пусть a_i — первое число в нашей последовательности, кратное p. Если $p \neq 2$, то $i > 2$ и $a_i = a_{i-2}(a_{i-1}+1)$. Следовательно,

$$a_{i-1} \equiv -1 \pmod p.$$

Заметим, что для $p = 2$ будет $i = 2$, и выведенное сравнение тоже выполнено.

Итак, $a_{i-1} \equiv -1$, $a_i \equiv 0$, а дальше в последовательности чередуются остатки -1 и 0 от деления на p: $a_{i+1} = a_{i-1}(a_i + 1) \equiv -1 \cdot (0 + 1) = -1 \pmod p$, $\quad a_{i+2} = a_i(a_{i+1} + 1) \equiv 0 \cdot (-1 + 1) = 0 \pmod p$ и т. д. Более того, как видно из последнего вычисления, степени числа p, на которые делятся члены последовательности, растут: если a_i делилось на p, то a_{i+2} делится на p^2 и т. д. Отсюда следует, что если a_n делится на p^k, то a_{n+2t} делится на p^{k+t}. Кроме того, учтем, что числа a_n и n одинаковой четности, поскольку $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и остатки по модулю 2 чередуются. Следовательно, a_{a_n} делится на $p^{k+(a_n-n)/2}$. Остается заметить, что $a_n > 2^n$ при $n \geqslant 5$ (это значит, что a_n существенно крупнее n) и $a_n \geqslant 2^k$, так как делится на p^k (это значит, что a_n существенно крупнее k), поэтому $a_n - n > 2kn$, откуда следует требуемое.

69. Ответ: максимальное число дорог равно $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$.

Пронумеруем олигархов и их города числами от 1 до N соответственно.

Оценка. Будем говорить, что дорога *нравится олигарху*, если она принадлежит этому олигарху или город на одном из концов дороги принадлежит этому олигарху. Заметим, что из города не может выходить дорога, принадлежащая владельцу этого города, так как в этом случае владельцы городов, которые соединяет эта дорога, могут образовать корпорацию. Следовательно, любая дорога нравится ровно трём олигархам. Сопоставим каждой дороге тройку олигархов, которым она нравится.

Рассмотрим произвольную тройку олигархов A, B и C. Докажем, что она сопоставлена не более чем одной дороге. Предположим, что это не так. Выбранная тройка олигархов может быть сопоставлена всего трем дорогам (если таковые имеются): дороге BC, принадлежащей олигарху A, дороге AC, принадлежащей B, и дороге AB, принадлежащей C. Легко видеть, что каким бы двум из этих дорог ни была сопоставлена тройка A, B, C, эта тройка олигархов сможет образовать корпорацию. Следовательно, каждая тройка олигархов сопоставлена не более одной дороге, т. е. дорог не более C_N^3.

Пример. Пусть дорога между городами i и j принадлежит олигарху под номером k тогда и только тогда, когда $k > i$, $k > j$.

Проверим, что этот пример удовлетворяет условию задачи. Предположим, что это не так и какая-то группа олигархов смогла создать корпорацию. Пусть M — наибольший номер олигарха в этой корпорации. Тогда из города M не выходит ни одной дороги, принадлежащей членам корпорации, что противоречит тому, что из этого города можно добраться до любого города корпорации.

Заметим, что в нашем примере любая тройка олигархов $i < j < k$ сопоставлена дороге ij, принадлежащей олигарху k, т. е. всего C_N^3 дорог.