Решения задач второго (заключительного) тура 2019-2020 учебного года.

56. Ответ: сможет.

Проведем “тест на Барабашку” с каждым набором из десяти камней.

Если Барабашки нет, то любые два камня в каждом тесте всегда лежат в одном и том же порядке (более лёгкий левее). Проверим, что если Барабашка есть, то это свойство нарушится. Пусть в какой-то десятке он поменял местами камни x и y, в другой десятке (не содержащей x и y) — a и b, в третьей — c и d. Посмотрим, что он поменял в десятке, где есть все эти шесть камней. Поскольку Барабашка меняет местами два камня, заведомо одну из этих трёх пар он не трогал, т. е. эта пара оказалась в правильном порядке.

57. Ответ: таких чисел не существует.

Если искомое число n нечетно, то все его делители были бы нечетны, то сумма квадратов любых пяти его делителей дает остаток 5 по модулю 8 и потому не может быть точным квадратом. Если число n не кратно трем, то эта сумма квадратов дает остаток 2 по модулю 3 и не может быть точным квадратом. Следовательно, n кратно двум и трём. Тогда среди пяти наименьших делителей числа n имеются числа 1, 2, 3 и, возможно, 6. Если 6 не входит в число пяти наименьших делителей, то эти делители — 1, 2, 3, 4, 5; сумма их квадратов равна 55 — не является точным квадратом. Таким образом, четыре из пяти наименьших делителей n — это 1, 2, 3, 6. Значит, среди пяти наименьших делителей два или три нечетных числа и тогда сумма квадратов делителей равна 2 или 3 по модулю 4, что опять невозможно для точных квадратов.

58. Обозначим через α угол CAD и равные ему углы. Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно прямой AD. Тогда $ACDC'$ — ромб. В треугольнике ADC': $180^\circ = \angle AC'D + 2\alpha = \angle AC'D + \angle ABD$, поэтому четырехугольник $ABDC'$ вписанный. Тогда $\angle ADC' = \angle ABC' = \alpha = \angle ABE$. Значит, прямая BC' проходит через точку E, и тогда E — середина отрезка BC'. Слеодвательно, $EC = EC' = BE$.

59. Пусть $S_k = (1^m+2^m+3^m+\ldots+(k-1)^m)/k^m$. Заметим, что $S_2 < 1$, но если увеличивать k, то когда-то S_k станет больше 1, поскольку $S_k > \left((k-2)^m + (k-1)^m\right)/k^m > 2(1-2/k)^m$, а при больших k второй множитель больше $1/2$. Осталось проверить, что, изменяясь от малых значений к большим, последовательность S_k не сможет проскочить промежуток $[1, 2)$. Это следует из того, что при увеличении k на 1 значение S_k не может вырасти более чем на 1. Это легко проверить непосредственно.

60. Заметим, что $OF \cdot OL = OL_1^2 = OL_2^2$. Значит, серединный перпендикуляр к отрезку L_1L_2 совпадает с биссектрисой угла L_1OL_2. Поэтому любая окружность, проходящая через точки L_1 и L_2, симметрична относительно этой биссектрисы. Значит, окружность, проходящая через точки F, L_1 и L_2 проходит через точку F', которая симметрична точке F относительно биссектрисы угла L_1OL_2.

61. Социальная сеть представляет собой граф, в котором люди — это вершины, а отношение «дружба» — ребра. Достаточно рассмотреть случай, когда этот граф является деревом. В требованиях условия задачи группу, в которой состоит от 1 до 100 членов, будем называть *малой*, а группу, где от 100 до 900 членов, — *большой*. Докажем утверждение задачи индукцией по числу пользователей сети. База индукции: $n \leqslant 900$. Если в сети не более 100 пользователей, объявим их всех малой группой. Если в сети от 101 до 900 пользователей, назначим малой группой любого пользователя, соответствующего висячей вершине, а всех остальных запишем в большую группу.

Индукционный переход. Достаточно проверить, что если число пользователей больше 900, то можно подобрать большую группу, при удалении которой граф останется связным. Подвесим наше дерево и рассмотрим наиболее далекую от корня вершину A (одну из вершин), у которой больше 900 потомков. У каждого из сыновей вершины A не более 900 потомков, при этом количество сыновей — не более 9. Если у каждого из сыновей A не более 99 потомков, то в сумме у A не более $9 \cdot 99 < 900$ потомков, что противоречит выбору вершины A. Значит, один из сыновей A имеет от 100 до 900 потомков, назначим его и его потомков большой группой.

62. Ответ: можно. Отождествим темы и пары остатков (x, y) по модулю 5. Каждый билет будем понимать как четвёрку тем, тогда требуется предъявить 50 четвёрок так, что каждая тема находится ровно в 8 четвёрках и каждая пара тем — ровно в одной четвёрке.

Работая с парами остатков по модулю 5, мы можем складывать (покоординатно по модулю 5). Рассмотрим 25 сдвигов четвёрки $A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,2)\}$, т. е. все четвёрки вида $\{(x,y),(x,y+1),(x+1,y),(x+2,y+2)\}$ $(*)$ и 25 сдвигов удвоенной четвёрки $2A = \{(0,0),(0,2),(2,0),(4,4)\}$: $\{(x,y),(x,y+2),(x+2,y),(x+4,y+4)\}$ $(**)$. Каждая тема (u,v) содержится ровно в 8 четвёрках, поскольку она единственным образом представима в каждом из видов (*) или (**). Докажем, что любые две различные темы (a,b), (u,v) содержатся вместе ровно в одной четвёрке. Для этого надо установить, что их разность $(u-a, v-b)$ представима единственным образом либо как разность двух тем из A, либо как разность двух тем из $2A$. Несложно проверить, что эти 24 разности — 12 разностей для A и 12 разностей для $2A$ — по разу покрывают все пары остатков, кроме $(0,0)$.