8 класс

42. Хулиган Вася недоволен своим средним баллом по математике, который опустился ниже 3. В качестве меры по резкому поднятию отметки он добрался до школьного журнала и исправил там все свои колы на тройки. Докажите, что после этого его средний балл все же не превысит 4. (*К. Тыщук*)

43. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B + \angle B_1 = 180^\circ$. Докажите, что если $A_1B_1 = AC + BC$, то $AB = A_1C_1 - B_1C_1$. (*А. Кузнецов*)

44. Андрей, Боря, Витя и Гена играют на доске 100×2019 (100 строк, 2019 столбцов). Ходят по очереди — сначала Андрей, потом Боря, затем Витя и наконец Гена, затем снова Андрей и т. д. Каждым ходом игрок должен закрасить две незакрашенные клетки, образующие прямоугольничек из двух клеток, причем Андрей и Боря закрашивают вертикальные прямоугольнички 2×1, а Витя и Гена — горизонтальные 1×2. Проигрывает тот, кто первым не сможет сделать ход. Какие трое ребят могут договориться и играть так, чтобы оставшийся заведомо проиграл? (Достаточно привести одну такую тройку ребят.)
(*С. Берлов, Н. Власова*)

45. У натурального числа n ровно 1000 натуральных делителей (включая 1 и само n). Эти 1000 делителей выписали в порядке возрастания. Оказалось, что любые два соседних делителя имеют разную четность. Докажите, что в числе n более 150 цифр. (*Ф. Петров*)

46. Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно четырехугольника $ABCD$. Отрезки AM, DM, BN и CN разбивают четырехугольник $ABCD$ на семь частей (шесть из которых треугольники, а седьмая — четырехугольник). Докажите, что если площади шести из этих частей — нечетные натуральные числа, то все эти шесть частей — треугольники. (*А. Кузнецов, Д. Ширяев*)

47. На доске написаны числа 1, 1, -1. Время от времени к доске подходит Михаил, стирает два числа a и b и заменяет их на $2a + c$ и $\frac{b-c}{2}$, где c — третье из написанных в этот момент на доске чисел. Докажите, что на доске всегда будет хотя бы одно отрицательное число. (*М. Антипов*)

48. Компания называется *хорошей*, если в ней у каждого человека ровно восемь знакомых, а среди любых семерых человек из этой компании найдутся двое незнакомых. Верно ли, что любую хорошую компанию можно рассадить по семи комнатам так, что никакие двое знакомых не попадут в одну комнату?
(*Фольклор*)