11 класс

63. Дан многочлен $f(x)$ степени 2000. При этом у многочлена $f(x-1)$ ровно 3400 корней, а у многочлена $f(1-x^2)$ ровно 2700 корней. Докажите, что расстояние между какими-то двумя корнями $f(x)$ меньше 0,002.
(*А. Солынин*)

64. На доске написано 100 различных натуральных чисел. К каждому из этих чисел прибавили НОД всех остальных. Могло ли среди 100 чисел, полученных в результате этих действий, оказаться три одинаковых?

65. В начале игры у Малыша и Карлсона есть один кусок шоколадки в виде квадрата 2019×2019 клеточек. Каждым ходом Малыш делит какой-нибудь кусок по клеточкам на три прямоугольных куска, а Карлсон съедает один из этих трех кусков по своему выбору. Игра заканчивается, когда сделать очередной ход невозможно. Если всего было сделано четное число ходов — побеждает Малыш, если нечетное — Карлсон. Кто выигрывает при правильной игре? (*Д. Ширяев*)

66. Неравнобедренный треугольник ABC периметра 12 вписан в окружность ω. Точки P и Q — середины дуг ABC и ACB соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке A, пересекает луч PQ в точке R. Оказалось, что середина отрезка AR лежит на прямой BC. Найдите длину отрезка BC.
(*А. Кузнецов*)

67. У барона Мюнхгаузена есть набор гирь 1000 различных целых весов, по 2^{1000} гирь каждого веса. Барон утверждает, что если взять по одной гире каждого веса, то общий вес этих 1000 гирь будет меньше 2^{1010}, причём этот вес невозможно набрать гирями из этого набора другим способом. Могут ли слова барона оказаться правдой? (*М. Антипов*)

68. Пусть между городами A, B, C и D есть дороги AB и CD, но нет дорог BC и AD. Назовем *перестройкой* замену пары дорог AB и CD на пару дорог BC и AD. Изначально в стране было несколько городов, некоторые пары городов были соединены дорогами, причем из каждого города выходило по 100 дорог. Министр нарисовал новую схему дорог, в которой из каждого города по-прежнему выходит 100 дорог. Известно, что как в старой, так и в новой схемах никакие два города не соединены более, чем одной дорогой. Докажите, что новую схему можно получить из старой с помощью нескольких перестроек. (*Т. Зубов*)

69. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает окружность ω в точке A'. M_B и M_C — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые $A'M_B$ и $A'M_C$ пересекают окружность ω вторично в точках B' и C', а также пересекают сторону BC в точках D_B и D_C соответственно. Описанные окружности треугольников CD_BB' и BD_CC' пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой. (*М. Германсков*)