

10 класс

56. Для непостоянной арифметической прогрессии (a_n) существует такое натуральное $n > 1$, что $a_n + a_{n+1} = a_1 + \dots + a_{3n-1}$. Докажите, что в этой прогрессии нет нулевых членов. (С. Иванов)

57. Каждые два из n городов Руритании соединены прямым авиарейсом одной из двух авиакомпаний — Альфа или Бета. Промонопольный комитет хочет, чтобы не менее k рейсов выполнялись компанией Альфа. Для этого он может хоть каждый день выбирать любые три города и изменять принадлежность трёх рейсов, связывающих эти города друг с другом (то есть отбирать каждый из этих рейсов у компании, которая его выполняет, и передавать другой). При каком наибольшем k комитет заведомо сможет за какое-то время достичь своей цели, как бы ни распределялись рейсы сейчас? (С. Берлов)

58. Даны натуральные числа a , b и $c \geq b$. Докажите, что $a^b(a+b)^c > c^b a^c$. (А. Храбров)

59. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M , а медианы треугольника ACD — в точке N . Окружность, описанная около треугольника ACM , пересекает отрезок BD в точке K , лежащей внутри треугольника AMB . Известно, что $\angle MAN = \angle ANC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle AKD = \angle MKC$. (А. Кузнецов, Р. Кузнецов)

60. В классе 25 учеников. Учитель хочет запасти N конфет, провести олимпиаду и раздать за успехи в ней все N конфет (решившие поровну задач должны получить поровну, решившие меньше — меньше, в том числе, возможно, и ноль конфет). При каком наименьшем N это будет возможно независимо от количества задач на олимпиаде и успехов учеников? (М. Антипов)

61. Можно ли расставить во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости все натуральные числа (по одному разу) так, чтобы для каждого n в каждом квадрате $n \times n$ сумма чисел была кратна n ? (А. Голованов)

62. В квадрате $10^{2019} \times 10^{2019}$ отмечено 10^{4038} точек. Докажите, что найдется такой прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата, площадь которого отличается от количества расположенных в нем точек хотя бы на 6. (А. Храбров)