49. Обозначим два 1001-значных квадрата из условия через $a^2 < b^2$. Тогда $a^2 \geqslant 10^{1000}$, откуда $a \geqslant 10^{500}$. При этом строго между a^2 и b^2 заведомо присутствуют числа a^2+1, a^2+2, $\ldots$, a^2+2a, то есть не менее чем $2 \cdot 10^{500}$ последовательных натуральных чисел. Докажем теперь, что в любом блоке из $2 \cdot 10^{500}$ подряд идущих 1001-значных чисел есть палиндром.

Рассмотрим 10^{500}-е число нашего блока. Оставим его первые 501 цифр неизменнными, а последние 500 цифр поменяем так, чтобы получился палиндром. При этом число изменится не более чем на $99\ldots9$ (500 девяток), т.е. на $10^{500}-1$. Поэтому оно не вылезет за пределы нашего блока.

50. Ответ: $k = 1008$. Приведем пример связного графа с 2019 вершинами, который нельзя покрыть 1008 простыми путями: одна вершина соединена с 2018 вершинами степени 1. Любой простой путь содержит не более двух висячих вершин, поэтому для покрытия требуется не менее 1009 путей.

Докажем, что 1009 путей хватит всегда. Выберем любую вершину A степени не меньше 2 (такая, очевидно, есть), и двух ее соседей B и C. Остальные 2016 вершин разобьем произвольным образом на 1008 пар, и проведем простые пути между вершинами в каждой паре, а также путь BAC — всего 1009 путей.

51. Рассмотрим точку B', симметричную B относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC. Тогда $ABB'C$ — равнобедренная трапеция, вписанная в ту же окружность. Пусть P и Q — середины дуги ABC и стороны BC, а R — середина отрезка BB'. Заметим, что $\angle PRQ > 90^\circ$, ибо $\angle PRB = 90^\circ$. Следовательно, $PQ > RQ$. С другой стороны, $RQ = B'C/2 = BC/2$. Таким образом, $PQ > BC/2$, что и требовалось.

52. Ответ: два знаменателя. Представим все дроби в виде $a_n/6^{100}$, тогда a_1, a_2, … — это снова все делители числа 6^{100} по одному разу. Частичные суммы обозначим через $S_n/6^{100}$. Тогда знаменатель несократимого представления частичной суммы зависит от того, в какой степени входят простые множители 2 и 3 в числитель S_n.

Несложно понять, что среди S_n есть как четные, так и нечетные числа, поэтому в некоторые S_n двойка входит в нулевой степени, а в некоторые – в ненулевой. Следовательно, ответ в задаче не меньше 2.

Приведем пример расстановки с двумя различными знаменателями. Вначале выпишем делитель $a_1 = 1$. Затем выпишем в любом порядке все делители, кратные 2 и 3. До этого момента все частичные суммы S_n ни на 2, ни на 3, т.е. содержали 2 и 3 в одной и той же (нулевой) степени, и последняя из них дает остаток 1 от деления и на 2, и на 3. Осталось выписать все делители вида 2^k и 3^k (k от 1 до 100). Выпишем сперва степени двойки, чередуя $2^k \equiv 1 \pmod 3$ и $2^k \equiv 2 \pmod 3$ (т.е. степени с четными и нечетными показателями). Все полученные частичные суммы будут по-прежнему нечетны и не кратны трем. Наконец, осталось выписать степени тройки, чередуя их остатки по модулю 4 так, чтобы все оставшиеся частичные суммы не делились на 4. При этом они останутся не кратными трем, и двойка будет входить в них не более чем в первой степени! Таким образом, в этом примере тройка входит во все S_n в нулевой степени, а двойка — в нулевой или в первой.

53. Вначале докажем следующую лемму: из любого набора степеней двойки, не превосходящих 2^{100} и дающих в сумме не менее чем 2^{100}, можно выбрать несколько, сумма которых в точности равна 2^{100}. Для доказательства заметим, что две равные степени двойки из этого набора можно заменить на одну, в два раза большую. Повторяя эти операции, мы либо получим число 2^{100} (и победим), либо получим не более чем по одному раз числа 1, 2^1, 2^2, …, 2^{99}, сумма которых строго меньше, чем 2^{100}.

Вернемся к задаче. Удалим все числа, меньшие $1/3$. Сумма удаленных чисел, очевидно, меньше чем $2^{100}/3$, т.е. сумма оставшися больше чем $\frac{2}{3}2^{100}$.

Для любого из оставшихся чисел x между $1{,}5x$ и $3x$ есть степень двойки. Если она больше 2^{100}, то число x можно "улучшить" до 2^{100}, а остальные стереть. В противном случае улучшим x, заменив на эту степень двойки. При этом каждое число выросло не менее чем в 1,5 раза, и их сумма стала больше или равна 2^{100}. Осталось применить лемму.

54. Заметим, что $\angle B'IC' = \angle BIC = 120^\circ$, поэтому сумма углов $IB'C'$ и $IC'B'$ равна 60°. Отметим на отрезке $B'C'$ такую точку P, что $\angle PAB_1 = \angle IB'C'$ и $\angle PAC_1 = \angle IC'B'$. Из этих двух равенств следует, что четырехугольники $PC_1C'A$ и $PB_1B'A$ вписанные.

Теперь $\angle PC_1A = \angle PC'A = \angle PB'I$, что означает вписанность четырехугольника BC_1PB'. Аналогично, вписан и CB_1PC'. Таким образом, указанные в условии окружности пересекаются именно в точке P.

55. Ответ: 32 пирожных.

Покажем, как Пете сделать так, чтобы на одной из тарелочек скопилось не менее 32 пирожных. Занумеруем тарелочки по кругу номерами от 0 до 2018. Покрасим в красный цвет 32 тарелочки тарелочки с номерами $0, 32, 2 \cdot 32, \ldots, 31 \cdot 32$. Петя будет указывать лишь на тарелочки с номерами от 0 до $31 \cdot 32$, а про остальные забудет. Вначале он укажет на все пирожки, лежащие на тарелочках с нечетными номерами (из этого промежутка) и потребует сдвинуть их на одну позицию. В результате нечетные тарелочки опустеют, а все пирожки с них скопятся на четных тарелочках (и при этом не выйдут за пределы этого промежутка). Затем он укажет на все пирожки на тарелочках вида $4k + 2$ и потребует сдвинуть их на 2. В результате все эти пирожки скопятся на тарелочках (из нашего промежутка) с номерами, кратными четырем. Далее он выдаст аналогичные указания для тарелочек вида $8k + 4$ (сдвинуть на 4) и, вида $16k + 8$ (сдвинуть на 8), наконец, вида $32k + 16$ (сдвинуть на 16). В результате этой деятельности все $31 \cdot 32 + 1$ пирожков окажутся на 32 красных тарелочках. По принципу Дирихле, на одной из них окажется не менее 32 пирожков.

Теперь научим Васю, как не допустить более 32 пирожков ни на одну тарелочку. Пусть Вася сопоставит каждой тарелочке блок из 32 тарелочек, содержащий эту тарелочку и 31 следующие за ней по часовой стрелке. Вася будет следить за тем, чтобы исходный пирожок с каждой тарелочки перемещался лишь в пределах сопоставленного ей блока. (Очевидно, что это возможно: на каком бы месте этого блока длиной 32 тарелочки не лежал пирожок, и какое бы сдвиг от 1 до 16 не назвал Петя, Вася сможет выбрать направление так, чтобы пирожок не вышелза пределы этого блока.) Но каждая тарелочка содержится ровно в 32 таких блоках, и на ней могут оказаться лишь пирожки, перемещающиеся по этим блокам, то есть не более 32 пирожков!