14. Ответ: $-3/2$. Напомним, что наименьшее значение квадратного трехчлена ax^2+bx+c, имеющего положительный старший коэффициент, равно $f(-b/2a)=(4ac-b^2)/4a$.

Если исходный трехчлен $f(x)$ равен ax^2+bx+c, то $f(2x)-f(x)=(4ax^2+2bx+c)-(ax^2+bx+c)=3ax^2+bx$, $f(3x)-f(x)=(9ax^2+3bx+c)-(ax^2+bx+c)=8ax^2+2bx$.

Наименьшие значения этих трехчленов равны соответственно $-b^2/12a$ и $-4b^2/32a=-b^2/8a$. Если первое из них равно -1, то второе равно $-3/2$.

15. Пусть стороны прямоугольника площади n^2+n равны $a\leqslant b$. Ясно, что a не превосходит n (иначе $n^2+n=ab\geqslant a^2\geqslant(n+1)^2$, что неверно). Отрежем от прямоугольника полоску $1\times a$. Останется прямоугольник, площадь которого, с одной стороны, не больше n^2+n-1, а с другой, не меньше $n^2+n-n=n^2$. По условию, в нём есть черная клетка, значит, она же есть и в исходном прямоугольнике.

16. Ответ: $2\cdot14^{200}=2^{201}\cdot7^{200}$. У этого числа есть делители $2^{201}\cdot7^{200}$, $2^{200}\cdot7^{200}$, $2^{199}\cdot7^{200}$, произведение которых равно $2^{600}\cdot7^{600}$.

Докажем, что N не может быть меньше, чем $2\cdot14^{200}$. Ясно, что число N должно делится на 2^{200}, иначе в произведение любых трех его делителей двойка войдет в степени меньшей, чем 600. Аналогично, N кратно 7^{200}. Таким образом, N кратно 14^{200}. Но N не может быть равно в точности 14^{200}, поскольку у этого числа есть лишь один делитель, равный 14^{200} (остальные меньше), и произведение трех любых делителей строго меньше 14^{600}. Следовательно, $N\geqslant2\cdot14^{200}$, что и требовалось.

17. Ответ: $AD:CD=3:1$. Решение. Обозначим точку, симметричную E, через E'. Пусть C' — точка, симметричная C относительно высоты BD. В силу симметрии $\angle BEC'=\angle BE'C=180^\circ-\angle A$. Значит, $\angle AEC'=\angle A$. Таким образом, треугольник AEC' равнобедренный, $AC'=EC'$. Далее, $\angle CEC'=90^\circ-\angle A=\angle ECC'$, то есть треугольник CEC' также равнобедренный, $CC'=EC'$. Итак, $AC'=C'C$, т.е. C' — середина стороны AC. Ну а поскольку D — середина CC', то $AD=3CD$.

18. Переформулируем задачу в более симметричной форме. Обозначим число $2000/x$ через y. В задаче идет речь про произведение целых частей двух положительных чисел x и y, для которых $xy=2000$.

Ответ: 0, а также все натуральные значения от 1000 до 2000.

Убедимся сначала, что любое из этих значений достигается. Значение 0 достигается при любом $0<x<1$. Кроме того, при всех $x\in[1,2)$ число $1000/x$ принимает все вещественные значения из интервала $(1000,2000]$, и его целая часть принимает любое целое значение от 1000 до 2000 (включительно). Умножая их на $[x]=1$, получаем все ответы от 1000 до 2000.

Докажем, что других значений нет. Верхняя оценка очевидна: $[x][y]\leqslant xy=2000$.

Если одна из целых частей равна 0, то и произведение равно 0. Случай, когда одна из целых частей равна 1, разбирался выше.

Следовательно, осталось доказать, что при $x,y\geqslant2$ выполнено неравенство $[x][y]\geqslant1000$.

Ясно, что хотя бы одна из целых частей больше или равна 3 (иначе оба числа x и y меньше 3, что невозможно). Не умаляя общности допустим, что $[x]\geqslant2$, $[y]\geqslant3$.

Заметим, что $x/[x]<([x]+1)/[x]=1+1/[x]\leqslant1+1/2$, ибо $[x]\geqslant2$. Аналогично, $y/[y]<1+1/[y]\leqslant1+1/3$, ибо $[y]\geqslant3$.

Перемножая эти неравенства, получаем $xy/[x][y]<(1+1/2)(1+1/3)=2$, то есть $[x][y]>xy/2=1000$, что и требовалось.