42. Пусть Вася получил a единиц, b двоек, c троек, d четверок и e пятерок. Тогда по условию $a + 2b + 3c + 4d + 5e < 3(a + b + c + d + e)$, что равносильно неравенству $2a + b > d + 2e$, откуда $a + b > e$. Требуется же доказать, что $2b + 3(a + c) + 4d + 5e \leqslant 4(a + b + c + d + e)$, что равносильно неравенству $a + 2b + c \geqslant e$. Это легко следует из выведенного выше неравенства $a + b > e$.

43. Отметим на луче AC (за точкой C) такую точку B', что $CB' = CB$. Тогда по условию $AB' = A_1B_1$. Отметим на луче AB такую точку C', что $\triangle AB'C' = \triangle A_1B_1C_1$. Точка C' попадет на продолжение стороны AB за точку B, поскольку иначе $\angle ABC + \angle C'B'A \leqslant \angle ABB' + \angle BB'A < 180^\circ$, что противоречит условию $\angle B + \angle B_1 = 180^\circ$. Поскольку $CB' = CB$ и $\angle CB'C' = 180^\circ - \angle ABC = \angle CBC'$, четырехугольник $CBC'B'$ симметричен относительно диагонали CC'. Следовательно, треугольники BCC' и $B'CC'$ равны. Отсюда получаем требуемое: $AB = AC' - BC' = AC' - B'C' = A_1C_1 - B_1C_1$.

44. Покажем, как игроки А, Б и Г могут обыграть В. Разобьем доску на вертикальные доминошки 2×1. Пусть игроки А и Б своим ходом закрашивают произвольные доминошки разбиения, а Г дополняет ход В до пары доминошек разбиения. Тогда перед ходом игрока В на доске всякий раз будет заполнено несколько доминошек разбиения, игрок В на очередном ходу (если он возможен) закрашивает по одной клетке в двух новых доминошках разбиения, и тогда игрок Г тоже может сделать ход — он закрасит две другие клетки в этих же доминошках. Заметим, что число доминошек разбиения равно $2019 \cdot 50$ — это число вида $4k+2$, а перед ходом игрока A, благодаря стратегии закрашено кратное четырем количество доминошек. Следовательно, игрок А, а за ним и Б всегда могут сделать ход. Таким образом, игра может закончиться лишь тем, что игрок В не сможет походить.

45. Обозначим делители $d_1 < d_2 < \ldots < d_{1000}$. Тогда $d_1 = 1$, d_3, …, d_{999} — нечетные делители, $d_2 = 2$, d_4, …, d_{1000} — четные. Для каждого нечетного делителя найдется вдвое больший его четный делитель, значит, $2d_1, 2d_3, \ldots, 2d_{999}$ — это список всех четных делителей в порядке возрастания. Таким образом, $d_{2k} = 2d_{2k-1}$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant 500$. Тогда $n = d_{1000} = 2d_{999} > 2d_{998} = 2^2 d_{997} > \ldots > 2^{499} d_2 = 2^{500} d_1 = 2^{500}$, т. е. $n > 2^{500} = (2^{10})^{50} > (10^3)^{50} = 10^{150}$, что и требовалось.

47. Несложно проверить, что при указанном в условии преобразовании величина $ab + bc + ac$ является инвариантом. Вначале это выражение равно -1. Если же все числа станут неотрицательными, то оно никак не может равняться -1, т.к. тоже будет неотрицательно.

48. Ответ: Это неверно. Для примера требуется построить граф, все вершины которого имеют степень 8, который не содержит семи попарно смежных вершин, и который нельзя разбить на семь групп попарно не смежных вершин. В нашем примере будет 15 вершин.

Рассмотрим 5 троек попарно смежных вершин (“треугольников”). Расположим эти треугольники по кругу, и каждую вершину соединим со всеми вершинами двух соседних треугольников. Таким образом, из каждой вершины будет выходить два ребра в вершины ее треугольника и по 3 ребра в два соседних треугольника — всего 8 ребер.

Тривиально проверяется, что в этом графе нет семи попарно смежных вершин, а также, что его нельзя разбить на 7 пустых подграфов.