63. Пусть $f(x)$ имеет корни $c_1, \ldots, c_k$, где $k \leqslant 2000$. Так как $f(x^2-1)$ имеет ровно 3400 корней, а уравнение $x^2-1=c_i$ имеет не более двух решений, то не более чем $k-1700$ корней f лежат за пределами $[-1,\infty)$ — множества значений x^2-1. Аналогично, так как $f(1-x^2)$ имеет ровно 2700 корней, а уравнение $1-x^2=c_i$ — не более двух решений, то не более чем $k-1350$ корней f лежат за пределами $(-\infty,1]$ — множества значений $1-x^2$. Значит, не менее $k-(k-1350)-(k-1700)=3050-k>1000$ корней $f(x)$ лежат на $[-1,1]$, откуда следует, что среди них есть два на расстоянии менее $0{,}002$.

64. Ответ: не могли. Предположим, что числа $a<b<c$, написанные изначально на доске, превратились в три одинаковых числа. Заметим, что НОД, прибавленный к числу a, является делителем чисел b и c, а значит, и их разности $c-b$. Следовательно, он не превосходит $c-b$, а значит, заведомо меньше разности $c-a$. После прибавления этого НОДа к a получилось число, меньшее c, и оно не могло совпасть с числом, полученным из c.

65. Ответ: выиграет Карлсон. Назовем кусок шоколадки *большим*, если его можно разрезать, и *малым*, если нельзя. Изначально есть только один ольшой кусок, а в конце игры их 0. Карлсон может играть так, чтобы четность количества больших кусков после его хода обязательно менялась: один большой кусок уничтожается ходом Малыша, после чего появляется от 0 до 3 новых больших кусков. Если количество новых больших кусков нечетно, то один точно есть и Карлсон его съест. Если же количество больших кусков четно, то есть хотя бы один малый и Карлсон съест именно малый кусок. Итак, число больших кусков после каждой пары ходов меняет четность, а все ходы должны поменять четность числа больших кусков, значит, их количество нечетно.

66. Ответ: 4. Пусть I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно. Тогда прямые AI_A, BI_B, CI_C будут биссектрисами треугольника ABC, а прямые I_BI_C, I_CI_A, I_AI_B — его внешними биссектрисами. Следовательно, точки A, B, C будут основаниями высот треугольника $I_AI_BI_C$, а окружность ω — его окружностью девяти точек. Тогда точки P является отличной от B точкой пересечения I_AI_C с ω. Следовательно, P — середина I_AI_C. Аналогично, Q —

середина I_AI_B. Таким образом, PQ — средняя линия треугольника $I_AI_BI_C$.

Обозначим через K и L соответственно основания внешней и внутренней биссектрис угла A треугольника ABC и через M — точку пересечения прямых AR и BC. По условию мы знаем, что $AM = MR$. Докажем, что $AM = ML = MK$. Действительно, $\angle MAL = \angle MAC + \angle CAL = \angle ABC + \angle LAB = \angle ALM$ (точка M лежит на луче BC, поскольку R — на PQ). Тогда $AM = ML$, а поскольку треугольник AKL прямоугольный, то и $AM = MK$.

Итак, $AM = ML = MK = MR$. Следовательно, $ALRK$ — прямоугольник и $LR \parallel I_BI_C$. Мы получаем, что прямые PQ и LR параллельны I_BI_C и имеют общую точку R. Тогда эти прямые совпадают. Это означает, что точка L лежит на средней линии треугольника $I_AI_BI_C$ и, следовательно, делит пополам отрезок AI_A. Далее, применив свойство внешней биссектрисы к треугольникам ABL и ACL, получим $AB/BL = AC/CLAI_A/I_AL = 2$. Тогда $AB + AC = 2BC$ и, следовательно, $BC = 4$.

67. Ответ: Да, существуют. Пусть $k = 1000$. Докажем, что подойдет набор гирь $a_{k-1} = 2^k - 2^{k-1}$, $a_{k-2} = 2^k - 2^{k-2}, \ldots, a_0 = 2^k - 2^0$. Сумма их весов равна $S = k \cdot 2^k - 2^{k-1} - \cdots - 2^1 - 2^0 = (k-1) \cdot 2^k + 1$.

При $k = 1000$ ясно что $s < 2^{1010}$. Кроме того, $s \equiv 1 \pmod{2^k}$. Предположим, что мы другим способом набрали s. Так как $a_i \equiv -2^i \pmod{2^k}$, то нам удалось набрать 1 по модулю 2^k как сумму нескольких -2^i, а стало быть, можно набрать число, сравнимое с $2^k - 1$ как сумму нескольких 2^i. Будем в такой сумме заменять две одинаковые степени 2 на одну, пока это возможно. В результате получится, что $2^k - 1$ набрано как сумма различных степенней двойки, а это можно сделать единственным способом: сложив все меньшие степени двойки. Это соответствует сумме $a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_0$. Остается лишь добавить, что замена одной степени двойки на две меньших (обратная нашим операциям) дает замену a_i на $2a_{i-1}$, что увеличивает сумму. Значит, наш способ единственен.

68. Рассмотрим множество M, состоящее из всех возможных 100-регулярных графров на данном множестве вершин V (наши две схемы дорог — среди них). Докажем что любые два графа из M можно перевести друг друга серией перестроек. Для двух графов $G, G' \in M$ пусть $F(G, G')$ — множество необщих рёбер этих графов, а $f(G, G') = |F(G, G')|$. Очевидно $f(G, G')$ четно, а в $F(G, G')$ поровну рёбер из G и G'.

Предположим, что существуют пары непереводимых друг в друга перестройками графов в M и рассмотрим такую прару графов (A, B) с минимальным $f(A, B)$. Граф $H = (V, F(A, B))$ имеет в каждой вершине поровну рёбер из A и из B. Следовательно, в H существует *чередующийся* цикл — в котором рёбра A и B чередуются. Рассмотрим минимальный такой цикл $Z = a_1a_2 \ldots a_{2k}$ (это не обязательно простой цикл, вершины в нем могут повторяться). Первая наша цель — найти на этом цикле четыре последовательные различные вершины. В самом деле, пусть среди a_1, a_2, a_3, a_4 есть совпадающие. Очевидно, возможно лишь совпадение $a_1 = a_4$. Так как рёбра цикла не повторяются, тогда $a_2 \neq a_5$ и в качестве искомой четверки подойдет a_2, a_3, a_4, a_5.

Итак, не умаляя общности будем считать, что все вершины a_1, a_2, a_3, a_4 различны, причем $a_1a_2, a_3a_4 \in E(A)$ и $a_2a_3 \in E(B)$. Рассмотрим три случая.

(a) $a_1a_4 \in E(B)$. Тогда проведем перестройку $a_1a_2a_3a_4$ в графе B (возможно, так как $a_1a_2, a_3a_4 \notin E(B)$) и получим граф C с $f(A, C) = f(A, B) - 2$. По предположению, C можно получить из A перестройками, значит, можно получить и B.

(b) $a_1a_4 \in E(A) \setminus E(B)$. Тогда $a_1a_4a_5 \ldots a_{2k}$ — чередующийся цикл, меньший чем Z, противоречие.

(c) $a_1a_4 \notin E(A) \cup E(B)$. Тогда проведем перестройку $a_1a_2a_3a_4$ в графе A (возможно, так как $a_2a_3, a_4a_1 \notin E(A)$) и получим граф C с $f(B, C) = f(A, B) - 2$. По предположению, C можно получить из B перестройками, значит, можно получить и A.

69. Сделаем поворот с центром в точке O, переводящий B' в A, и обозначим образ точки C при этом повороте через B''. Пусть X — точка пересечения прямых AA' и BB''. Из равенства дуг AB'' и $B'C$ легко следует равенство углов $\angle AXB'' = \angle B'D_BC$. Тогда описанная окружность треугольника CD_BB' при этом повороте переходит в описанную окружность треугольника AXB''. При этом точка O, очевидно, будет иметь одинаковые степени относительно этих двух окружностей.

Аналогично, рассмотрев поворот с центром в O, переводящий C' в A и обозначив образ точки B через C'' и точку пересечения AA' с CC'' через Y, мы получим, что точка O имеет одинаковые степени относительно описанных окружностей треугольников BD_CC' и AYC''.

Таким образом, вместо утверждения “точка O лежит на прямой PQ”, эквивалентного тому, что точка O имеет одинаковые степени относительно описанных окружностей треугольников CD_BB' и BD_CC', нам достаточно доказать, что точка O имеет одинаковые степени относительно описанных окружностей треугольников AXB'' и AYC''. А это эквивалентно тому, что точки X и Y совпадают.

Заметим, что прямая $A'B'$ — медиана треугольника $AA'C$ и $\angle(AA', A'B') = \angle(B''A', A'C)$. Следовательно, $A'B''$ — симедиана треугольника $AA'C$ и тогда четырехугольник $AA'CB''$ — гармонический. Аналогично, четырехугольник $AA'BC''$ также гармонический. Но тогда обозначив через S точку пересечения прямых AA' и BC мы получим равенство двойных отношений $(A, S, A', X) = (A, C, A', B'') = -1 = (A, B, A', C'') = (A, S, A', Y)$, откуда $X = Y$.