56. Выразим условие через a_1 и d: $2a_1 + (2n-1)d = (3n-1)a_1 + (3n-1)(3n-2)d/2$. Отсюда легко найти $a_1 = (9n-4)d/6$. Чтобы в прогрессии нашелся нулевой член, частное a_1/d должно быть целым (и отрицательным). Однако $(9n-4)/6$ — заведомо не целое число!

57. Ответ: при $k = \frac{n(n-1)}{2} - [\frac{n}{2}]$.

Если из какого-то города A выходит два рейса авиакомпании Бета — в города B и C, то, применив операцию к тройке городов (A, B, C), мы уменьшим суммарное количество рейсов, выполняемых авиакомпанией Бета. Действуя таким образом, мы сможем добиться того, что из каждого города выходит не более одного рейса Беты, а значит, общее число ее рейсов не превосходит $[n/2]$.

Далее, заметим, что для каждого фиксированного города A четность количества рейсов авиакомпании Бета, выходящих из города A, не меняется. В частности, в стране, где с самого начала все города (кроме, быть может, одного города X) разбиты на пары городов, соединенных рейсами компании Бета, а других рейсов компании Бета нет, количество рейсов компании Бета не может быть уменьшено с помощью указанных операций, поскольку в такой стране из каждого города, кроме X, гарантированно выходит не менее одного рейса авиакомпании Бета.

58. Сократим неравенство на a^b: $(a+b)^c > c^b a^{c-b}$. Левая часть, если ее раскрыть по биному, содержит слагаемое $C_c^b a^{c-b} b^b$. Проверим, что уже одно это слагаемое крупнее правой части, т.е. что выполняется неравенство $C_c^b a^{c-b} b^b > c^b a^{c-b}$. Сократим a^{c-b}, воспользуемся формулой для биномиального коэффициента $C_c^b = \frac{c(c-1)\ldots(c-b+1)}{b!}$ и домножим на $b!$: $c(c-1)\ldots(c-b+1)b^b > b!c^b$. Запишем последнее неравенство в виде

$$\prod_{k=0}^{b-1}(c-k)b > \prod_{k=0}^{b-1}(b-k)c.$$

Теперь неравенство очевидно: каждый множитель $cb - kb$ в левой части крупнее соответствующего множителя $cb - kc$ в левой.

60. Ответ: $600 = 25 \cdot 24$ конфет.

Покажем, что меньшего числа конфет может не хватить. На тот случай, если все участники решили поровну задач, число конфет необходимо сделать кратным 25. Пусть $N = 25k$. Представим себе, что 24 человека решили поровну, а 25-й решил меньше. Если каждому из первых 24 участнников дать по k конфет или еще меньше, то останутся лишние конфеты. Значит, каждому из них необходимо дать как минимум по $k+1$ конфете, откуда $25k \geqslant 24(k+1)$, то есть $k \geqslant 24$.

Теперь докажем по индукции, что можно раздать m участникам $m(m-1)$ конфет так, чтобы каждый получил меньше $2s$ конфет. База при $m = 1$ очевидна: дадим единственному участнику 0 конфет.

Переход от $m-1$ к m. Пусть есть $s \geqslant 1$ участников с самым большим результатом, и кроме них еще t участников, $s + t = m$. Менее успешным участникам по предположению индукции раздадим $t(t-1)$ конфет (причем всем меньше чем по $2t$). После этого останется $(s+t)(s+t-1) - t(t-1) = s(s+2t-1)$ конфет, и мы раздадим их поровну s "верхним" участникам. Каждый из них получит по $s + 2t - 1$ конфет. Это число не меньше, чем $2t$, поэтому больше того, что мы раздали каждому из остальных. Кроме того, $s + 2t - 1 < 2s + 2t = 2m$, что и завершает переход.