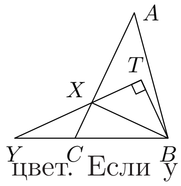
49. Докажите, что для каждого натурального числа N найдется такое целое $k \geqslant 0$, что N удастся записать в виде суммы чисел $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^k$, каждое из которых участвует в этой сумме 1 или 2 раза. (Например, $12 = 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^2$.) (*М. Антипов*)

50. Дано нечётное натуральное число $n > 1$. На доске записаны числа $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$. Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел. (*С. Берлов*)

51. Дан остроугольный треугольник ABC. На отрезке AC и на продолжении стороны BC за точку C выбираются такие переменные точки X и Y соответственно, что $\angle ABX + \angle CXY = 90^\circ$. Точка T — проекция точки B на прямую XY. Докажите, что все такие точки T лежат на одной прямой. (*С. Берлов*)

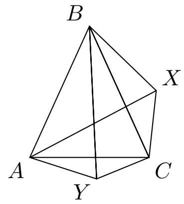


52. На круглом ожерелье висят $n > 3$ бусинок, каждая покрашена в красный или синий цвет. Если у какой-то бусинки соседние с ней бусинки покрашены одинаково, ее можно перекрасить (из красного в синий или из синего в красный). При каких n из любой исходной раскраски бусинок можно сделать ожерелье, в котором все бусинки покрашены одинаково? (*С. Берлов*)

53. Можно ли нарисовать на плоскости треугольник ABC и отметить на той же плоскости две точки X и Y, так что

$$AX = BY = AB,$$
$$BX = CY = BC,$$
$$CX = AY = CA?$$

(*М. Иванов*)



54. Даны два нечетных натуральных числа a и b. Докажите, что существует такое натуральное k, что хотя бы одно из чисел $b^k - a^2$ и $a^k - b^2$ делится на 2^{2018}. (*А. Голованов*)

55. В клетчатом квадрате 10×10 (стороны клеток имеют единичную длину) выбрали n клеток, в каждой из них нарисовали одну из диагоналей и поставили на этой диагонали стрелочку в одном из двух направлений. Оказалось, что для любых двух стрелочек либо конец одной из них совпадает с началом другой, либо расстояние между их концами не меньше 2. При каком наибольшем n это возможно? (*М. Антипов*)