

8 класс

42. По кругу сидят 300 человек: некоторые из них рыцари, а остальные — лжецы. Антон спросил у каждого из них: «Сколько лжецов среди твоих соседей?» и сложил полученные числа. Затем Аня сделала то же самое. Отвечая на вопрос, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут, но называют лишь числа 0, 1 или 2. Могла ли сумма чисел у Антона оказаться на 410 больше, чем у Ани? (А. Чухнов)

43. Внутри угла ABC , равного 105° , отмечена точка X такая, что $\angle CBX = 70^\circ$ и $BX = BC$. На отрезке BX выбрана точка Y так, что $BY = BA$. Докажите, что $AX + AY \geq CY$. (А. Кузнецов)

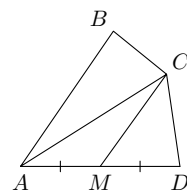
44. Вася расставил во всех клетках доски 101×101 числа от 1 до 101^2 по одному разу. Петя выбирает клетку доски, ставит на нее фишку и хочет сделать как можно больше ходов так, чтобы число под фишкой постоянно увеличивалось. За один ход Петя может передвинуть фишку в любую клетку квадрата 5×5 с центром в клетке, где сейчас стоит фишка (фишка должна при этом остаться в пределах доски). Какое наибольшее число ходов Петя заведомо сможет сделать, как бы Вася ни расставлял числа? (С. Берлов)

45. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляется сумма его первых 100 цифр. Докажите, что через некоторое время три раза подряд получится число, не делящееся на 3. (С. Берлов)

46. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD , $CM \parallel AB$, $AD = BD$ и $3\angle BAC = \angle ACD$. Найдите угол ACB . (С. Берлов)

47. Сумма положительных чисел a , b , c и d равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d}{(a + b + c)^3} + \frac{b^2 + c^2 + d^2 + a}{(b + c + d)^3} + \frac{c^2 + d^2 + a^2 + b}{(c + d + a)^3} + \frac{d^2 + a^2 + b^2 + c}{(d + a + b)^3} > 4.$$



(К. Сухов)

48. В стране 600 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из любого города можно добраться по дорогам в любой другой. Для любых двух соединенных дорогой городов A и B найдутся еще два таких города C и D , что любые два из этих четырех городов соединены дорогой. Докажите, что можно закрыть на ремонт несколько дорог так, чтобы количество городов, из которых выходит ровно две дороги, стало меньше 100, и при этом между любыми двумя городами остался единственный путь, не проходящий два раза по одной и той же дороге. (Д. Карпов)