Второй тур

6 класс

29. В тетрадь записали все натуральные делители натурального числа a, а затем — все натуральные делители натурального числа b. В результате в тетради оказалось записано четное количество чисел. Катя разбила все эти числа на пары и посчитала произведение чисел в каждой паре. (Например, при $a = 2, b = 6$ в тетради окажется 6 чисел — 1, 2, 1, 2, 3, 6; они будут разбиты на 3 пары.) Все Катины произведения оказались равными. Докажите, что $a = b$. (*С. Берлов*)

30. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить клетки квадрата 5×5 так, чтобы среди любых трех клеток, идущих подряд по вертикали, горизонтали или диагонали, не было одноцветных? (*М. Антипов*)

31. За круглым столом сидят 300 человек: некоторые из них рыцари, а остальные — лжецы. Антон спросил у каждого из них: «Сколько лжецов среди твоих соседей?» и сложил полученные числа. Затем Аня сделала то же самое. Отвечая на вопрос, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут, но называют лишь числа 0, 1 или 2. Оказалось, что сумма чисел у Антона на 400 больше, чем у Ани. Сколько за столом лжецов? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет. (*А. Чухнов*)

32. На доске написано число 2018. Игроки ходят по очереди, начинает Саша. За один ход Саша может приписать справа к числу на доске одну цифру, а Андрей — две. Если после хода Андрея число на доске станет делиться на 112, он побеждает. Если этого не произойдет, и на доске окажется выписано 2018-значное число, выигрывает Саша. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника? (*А. Кузнецов*)

33. В турнире по крестикам-ноликам каждые два участника сыграли между собой по две партии (ничьих не бывает, играющий крестиками перед каждой партией определяется жребием). За победу начислялось одно очко. В результате все участники набрали разное количество очков. Потом организаторы посчитали такую схему несправедливой и добавили по одному очку за каждую победу ноликами. Могли ли после этого все участники набрать поровну очков? (*А. Солынин*)

34. На прямой дороге, идущей с севера на юг, стоит воз, которым управляет Лебедь. Ровно в полночь Рак и Щука выбрали натуральные числа $m > n$. Каждые n минут (т. е. через n, $2n$, $3n \ldots$ минут после полуночи) Щука командует «На юг!», а каждые m минут (через m, $2m$, $3m \ldots$ минут после полуночи) Рак командует «На север!». Услышав любую команду, Лебедь немедленно начинает (или продолжает) тащить воз в указанную сторону со скоростью 1 м/мин. До первой команды воз был неподвижен. Через mn минут после полуночи Рак и Щука впервые дали Лебедю одновременно две разные команды, и уставший Лебедь остановил воз. На каком расстоянии от исходного места он оказался в этот момент? (*К. Тыщук*)