

63. Прямая ℓ на координатной плоскости не параллельна осям координат. При каком наименьшем d можно утверждать, что расстояние от некоторой точки с целыми координатами до ℓ не превосходит d ?

(А. Голованов)

64. У Васи есть 100 карточек трех цветов, карточек каждого цвета не больше 50. Докажите, что он может выложить из них квадрат 10×10 так, чтобы любые две соседние (по стороне) карточки оказались разного цвета.

(Д. Максимов)

65. На биссектрисе угла B остроугольного треугольника ABC выбрана точка T . Окружность S , построенная на BT как на диаметре, пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Окружность, проходящая через вершину A и касающаяся S в точке P , вторично пересекает прямую AC в точке X . Окружность, проходящая через вершину C и касающаяся S в точке Q , вторично пересекает прямую AC в точке Y . Докажите, что $TX = TY$.

(С. Берлов)

66. Известно, что квадратный трехчлен

$$(b+c)x^2 + (a+c)x + (a+b)$$

не имеет корней. Докажите, что $4ac - b^2 \leq 3a(a+b+c)$.

(К. Сухов)

67. Правильный шестиугольник разбит на равные ромбы со сторонами, параллельными сторонам шестиугольника. На трёх сторонах шестиугольника, среди которых нет соседних, задали направления в порядке обхода шестиугольника против часовой стрелки. Затем на каждой стороне ромба поставили стрелку, направленную так же, как параллельная этой стороне сторона шестиугольника. Докажите, что не существует замкнутого пути, идущего по стрелкам.

(Ю. Базлов)

68. Положительные иррациональные числа α и β таковы, что при всех $x > 0$ выполнено равенство $[\alpha[\beta x]] = [\beta[\alpha x]]$. Докажите, что $\alpha = \beta$.

(J. Lagarias, T. Maruyama, D. Richman)

69. На окружности S отмечены точки A и B . Касательные к окружности S , проведенные в точках A и B , пересекаются в точке C . Пусть M — середина отрезка AB . Окружность S_1 , проходящая через точки M и C , вторично пересекает отрезок AB в точке D и окружность S — в точках K и L . Докажите, что касательные, проведенные к окружности S в точках K и L , пересекаются на отрезке CD .

(Д. Столяров)