

10 класс

56. Миша приехал в страну, в которой n городов и каждые два напрямую соединены дорогой. Он собирается, начав с некоторого города, объехать несколько городов, не заезжая ни в один город дважды. Каждый раз, пока Миша едет по дороге, президент разрушает k дорог, ведущих из города, в который ведет эта дорога. (А если там нет такого количества уцелевших дорог — разрушает все оставшиеся, кроме той, по которой едет Миша.) Какое наибольшее количество городов сможет объехать Миша, независимо от действия президента? (П. Ходунов, А. Кузнецов, И. Лосев)

57. Раскрасим вершины 2018-угольника в два цвета так, чтобы любые две соседние вершины были разного цвета. Если сумма углов при вершинах одного цвета равна сумме углов при вершинах другого цвета, будем называть такой 2018-угольник *интересным*. В выпуклом 2019-угольнике отметили одну вершину. Оказалось, что при удалении любой неотмеченной вершины остается интересный 2018-угольник. Докажите, что при удалении отмеченной вершины также остается интересный 2018-угольник. (А. Кузнецов)

58. Вдоль окружности расположено n монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

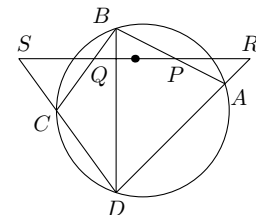
59. Коэффициенты многочлена $f(x)$ — целые числа, по модулю не превосходящие 5 000 000. При этом каждое из уравнений

$$f(x) = x, \quad f(x) = 2x, \quad \dots, \quad f(x) = 20x$$

имеет целый корень. Докажите, что $f(0) = 0$.

(М. Антипов)

60. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, перпендикулярная BD , пересекает отрезки AB , BC и лучи DA , DC в точках P , Q , R , S соответственно. Известно, что $PR = QS$. Докажите, что середина отрезка PQ равноудалена от точек A и C . (А. Кузнецов)



61. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 4(a - b)^2 \sqrt{abcd}.$$

(С. Горский, Ф. Петров)

62. Шашка передвигается из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний угол, на каждом шагу перемещаясь на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Пусть a — число путей, в которых ровно 70 шагов шашка совершает под диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, а b — число путей, в которых таких шагов ровно 110. Что больше: a или b ? (Фольклор)