14. О т в е т: $f(6) = -10$.

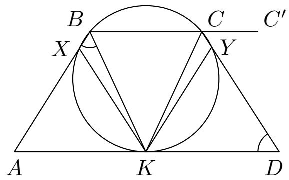
Рассмотрим квадратный трёхчлен $3g(x)-2f(x)$. Ясно, что его старший коэффициент равен 1. Кроме того, соотношения в условии состоят в том, что числа -1 и 1 являются корнями этого квадратного трёхчлена. Но это значит, что $3g(x) - 2f(x) = (x-1)(x+1)$.

Итак, $3g(6) - 2f(6) = (6-1)(6+1)$, то есть $15 - 2f(6) = 35$, откуда $f(6) = -10$.

15. О т в е т: наибольшее число кузнечиков, которое можно расставить на доске 20×20, равно удвоенному числу горизонталей, т. е. 40.

Решение аналогично решению задачи 7.

16. О т в е т: $\angle XKY = 65^\circ$.



Обозначим угловую величину дуги BX через 2β, а угловую величину дуги CY через 2γ. Так как угол BCY опира- ется на всю окружность за вычетом дуг BC и CY, то величина дополнительного угла равна полусумме величин этих дуг:

$$\angle DCC' = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{CY}) = 50^\circ + \gamma.$$

Заметим еще, что $\angle DCC' = \angle ADC = \angle ABK$. Тогда $\angle XKY = \beta + 50^\circ + \gamma = \beta + \angle DCC' = \beta + \angle ABK = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BK} \overset{*}{=} \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$. В равенстве, помеченном звездочкой, мы воспользовались тем, что $\overset{\smile}{BK} = \overset{\smile}{CK}$ как дуги, заключенные между параллельными прямыми.

17. Прежде всего заметим, что все числа, которые появятся на доске, будут меньше 30 000.

Докажем, что на доске не смогут оказаться даже все числа от 6 000 до 10 000. Предположим, что в какой-то момент все эти 4001 чисел появились.

Каким образом число a из этого промежутка могло оказаться на доске? Есть два варианта: либо оно было выписано изначально, либо появилось как НОД двух чисел, кратных a, уже выписанных к этому моменту. Во втором случае это могли быть лишь какие-то два из чисел $2a$, $3a$ или $4a$ (число $5a$ больше или равно 30 000, как и все следующие кратные a). Однако $\text{НОД}(2a, 4a) = 2a$, поэтому одно из этих двух чисел точно равно $3a$. А это число уже не могло появится как НОД двух чисел, то есть оно изначально было на доске.

Итак, для любого числа a из нашего промежутка одно из чисел a и $3a$ было записано на доске вначале. Покрасим это число в красный цвет (если они оба были записаны вначале — покрасим любое из них). Заметим, что ни одно число не покрашено в красный цвет дважды. Это могло бы произойти, если бы в промежутке $[6\,000, 10\,000]$ нашлись числа a и b, для которых $a = 3b$; но таких чисел, очевидно, не существует. Поэтому мы покрасили в красный цвет 4001 из 4000 чисел, присутствовавших на доске вначале. Противоречие!

18. Нетрудно придумать конфигурацию точек, в которой у каждой точки расстояния до двух ближайших точек отличаются, например в 10 раз: достаточно рассмотреть 4 вершины прямоугольника со сторонами 1 и 10. Таким образом, «секретом» этой задачи является некоторое обстоятельство, которое не позволяет такого рода конфигурации состоять из 179 точек.

Предположим, что утверждение задачи неверно. Это значит, что для любой отмеченной точки расстояние от неё до любой другой отмеченной точки (кроме ближайшей) превосходит расстояние до ближайшей более чем в $c = 1{,}79$ раз.

Докажем, что не могут найтись три такие отмеченные точки A, B и C, что ближайшей к A является точка B, а ближайшей к B — точка $C \neq A$. Пусть $AB = x$. Поскольку AB — кратчайшее расстояние от точки A, то $AC > cx$. Поскольку BC — кратчайшее расстояние от точки B, то $BC < \frac{x}{c}$. Тогда по неравенству треугольника

$$x + \frac{x}{c} > AB + BC \geqslant AC > cx,$$

откуда $c^2 - c - 1 < 0$. Но для $c = 1{,}79$ это не так! Можно проверить это обстоятельство вручную, а можно заметить, что число 1,79 лежит на числовой прямой правее большего корня квадратного трехчлена $t^2 - t - 1$, т. е. числа $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61\ldots$

Переформулируем доказанное по-другому: если B — точка, ближайшая к A, то и наоборот, A — ближайшая к B. Таким образом, все точки разбиваются на пары (в каждой паре точки ближайшие друг к другу). Но по условию количество отмеченных точек нечетно. Противоречие.