49. Запишем число $N+1$ в двоичной системе. Пусть самая большая степень двойки в этом разложении равна 2^{k+1}, $k \geqslant 0$. Заменив это слагаемое на сумму

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1,$$

мы получим разложение числа N, в котором каждое из слагаемых 2^0, 2^1, $\ldots$, 2^k будет участвовать 1 или 2 раза.

50. Пусть S — сумма всех чисел данного набора.

Для любых двух чисел a и b из этого набора проведем стрелку от a к b, если $(S-a)$ делится на b. Если утверждение задачи неверно, то из каждого числа a ведет стрелка как минимум в одно из чисел $b \neq a$. Кроме того, несложно видеть, что из числа n ведет стрелка в само число n. В самом деле, $S-n$ делится на n, поскольку

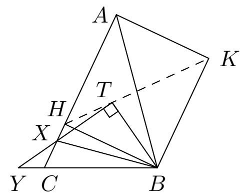
$$S - n = (n+1) + \ldots + (2n-1) = n \cdot \frac{3(n-1)}{2}.$$

Таким образом, из всех чисел суммарно выходит как минимум $n+1$ стрелок. Следовательно, в одно из чисел ведет как минимум две стрелки. Но это невозможно: если $S-a_1$ и $S-a_2$ делятся на b, то a_1-a_2 кратно b, в то время как

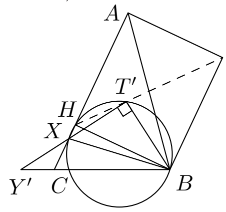
$$|a_1 - a_2| \leqslant (2n-1) - n = n - 1 < b.$$

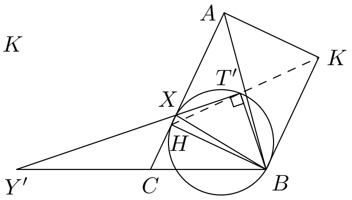
Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

51. Пусть точка H — основание высоты, опущенной из точки B на сторону AC. Достроим прямоугольный треугольник AHB до прямоугольника $AHBK$. Покажем, что все точки T лежат на прямой KH.



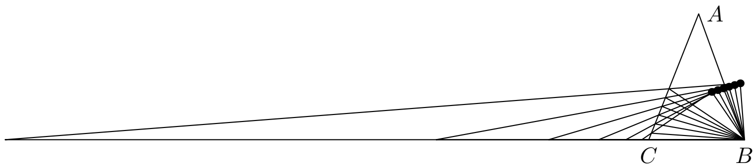
Для этого возьмем на ней точку T' и проведем через T' прямую перпендикулярно BT'. Пусть она пересекает сторону AC в точке X, а продолжение стороны BC в точке Y'. Если мы докажем, что $\angle ABX + \angle CXY' = 90°$, то поскольку точка Y однозначно определяется точкой X, получится, что $Y = Y'$ и, значит, соответствующая им точка T совпадает с точкой T' и, в частности, лежит на прямой KH.





Так как $\angle BT'X = \angle BHX = 90°$, четырехугольник $BXHT'$ (если точка X лежит на отрезке CH) или четырехугольник $BHXT'$ (если точка X лежит на отрезке AH) является вписанным. Тогда $\angle CXY' = \angle T'XA = \angle T'BH$ и $\angle T'HB = \angle T'XB$. Кроме того $\angle T'HB = \angle ABH$, поскольку это углы между диагоналями прямоугольника и стороной BH. Осталось заметить, что

$$\angle ABX + \angle CXY' = \angle ABX + \angle T'BH = \angle T'BX + \angle ABH = \\ = \angle T'BX + \angle T'HB = \angle T'BX + \angle T'XB = 90°.$$



52. Ответ: при всех нечетных n.

Докажем, что при нечетной длине ожерелья все бусинки можно сделать одноцветными. Любое ожерелье разбивается на блоки подряд идущих бусинок одинакового цвета. Среди них обязан присутствовать блок нечетной длины (допустим, красный). Перекрасим в нём сначала все бусинки с четным номером, а потом все остальные его бусинки. В результате этот блок станет синим и сольётся с соседними синими блоками — количество блоков уменьшится. Рано или поздно останется один блок, чего мы и хотели.

$$\ldots\text{–с–к–к–к–к–к–с–}\ldots$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\ldots\text{–с–к–с–к–с–к–с–}\ldots$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\ldots\text{–с–с–с–с–с–с–с–}\ldots$$

Приведем два объяснения, почему четные n не подходят.

Способ 1 (инвариант). Легко убедиться, что при любом перекрашивании количество пар соседних бусинок вида к–к либо не меняется, либо меняется ровно на 2, т. е. в любом случае не меняется четность этого числа. То же самое верно и про число пар вида с–с. В одноцветном ожерелье (четной длины) оба эти количества четны. Поэтому из ожерелья, в котором оба эти количества нечетны, нельзя получить ни одно из двух одноцветных ожерелий. При четном n таково, например, ожерелье –к–к–с–с–. . . –с–.

Способ 2 (критические ожерелья). Для n, кратного четырём, рассмотрим ожерелье вида . . . –к–к–с–с–к–к–с–с–. . . , в котором чередуются пары красных и пары синих бусинок. С этим ожерельем нельзя сделать *ни одного* перекрашивания. В частности, из него нельзя получить и одноцветное.

Если n четно, но имеет вид $n = 4k+2$, немного изменим вид критического ожерелья: . . . –к–к–к–к–с–с–к–к–с–с–. . . (один из красных блоков теперь имеет длину 4). С ним можно сделать лишь одно перекрашивание, точнее, два аналогичных — перекрасить вторую или третью красную бусинку в длинном блоке. С полученным ожерельем можно сделать лишь две операции: обратную к только что проделанной или операцию, перекрашивающую бусинку, соседнюю с только что перекрашенной.

$$\ldots\text{–к–к–к–к–с–с–к–к–с–с–}$$
$$\downarrow$$
$$\ldots\text{–к–к–с–к–с–с–к–к–с–с–}$$
$$\downarrow$$
$$\ldots\text{–к–к–с–с–с–с–к–к–с–с–}$$

После этого перекрашивания ожерелье будет иметь тот же вид (чередующиеся пары к–к и с–с и один блок с–с–с–с) и его можно будет лишь заменить за две опреации обратно на исходное.

53. Ответ: да, это равнобедренный треугольник $30°$, $75°$, $75°$, а точки X и Y получены отражениями вершин основания этого треугольника относительно противоположных сторон.

То, что пример походит, — очевидно.

54. Будем решать обобщенную задачу. Дано натуральное число n и два нечетных натуральных числа a и b. Докажите, что существует такое натуральное k, что хотя бы одно из чисел $b^{2k}-a^2$ и $a^{2k}-b^2$ делится на 2^n.

Воспользуемся следующим известным утверждением: пусть число $c-1$ дает остаток 2^k при делении на 2^{k+1}, где $k \geqslant 2$. Тогда c^2-1 дает остаток 2^{k+1} при делении на 2^{k+2}.

Пусть a^2-1 делится на 2^α и не делится на $2^{\alpha+1}$, а b^2-1 делится на 2^β и не делится на $2^{\beta+1}$. Очевидно, что при этом $\alpha, \beta \geqslant 2$. Тогда a^2-1 дает остаток 2^α при делении на $2^{\alpha+1}$, а b^2-1 дает остаток 2^β при делении на $2^{\beta+1}$. Пусть $\alpha \leqslant \beta$, положим для краткости $2^{\beta-\alpha}=m$. По лемме число

$$a^{2m}-1=(((a^2)^{\overbrace{2)^{\cdots})^2}^{\substack{\beta-\alpha\\ \text{двоек}}}}-1 \qquad (*)$$

дает остаток 2^β при делении на $2^{\beta+1}$.

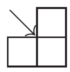
Будем решать задачу индукцией по n. Если $n \leqslant \beta+1$, то нам подойдет $k=m$, поскольку a^{2m} и b^2 дают равные остатки при делении на 2^β. Сделаем переход от n к $n+1$. По индукционному предположению при некотором k число $a^{2k}-b^2$ делится на 2^n. Если оно делится и на 2^{n+1}, то переход сделан. Иначе оно дает остаток 2^n при делении на 2^{n+1}. Пусть $r=2^{n-\beta}+1$. Тогда по лемме $b^{2(r-1)}-1$ дает остаток 2^n при делении на 2^{n+1}. Следовательно, $b^{2r}-b^2$ дает остаток 2^n при делении на 2^{n+1}. Воспользуемся формулой разности степеней:

$$a^{2kr}-b^{2r}=(a^{2k}-b^2)\left(a^{2k(r-1)}+a^{2k(r-2)}b^2+a^{2k(r-3)}b^4+\ldots+b^{2(r-1)}\right).$$

Первая скобка дает остаток 2^n при делении на 2^{n+1}, вторая состоит из r нечетных слагаемых и, значит, нечётна. Стало быть, разность $a^{2kr}-b^{2r}$ дает остаток 2^n при делении на 2^{n+1}. Но тогда $a^{2kr}-b^2=(a^{2kr}-b^{2r})-(b^{2r}-b^2)$ делится на 2^{n+1}, поскольку выражения в скобках дают одинаковые остатки при делении на 2^{n+1}.

55. Ответ: при $n=48$.

Для каждой стрелочки рассмотрим трёхклеточный уголок, получающийся выкидыванием из квадрата 2×2 с центром в конце стрелочки квадратика 1×1, диагональю которого является эта стрелочка. Заметим, что такие уголки не пересекаются и содержатся в квадрате 12×12. Тогда их не больше чем $12^2/3=48$.



Пример расстановки 48 стрелочек показан на рисунке.