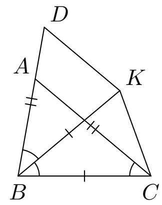
9. Решение полностью аналогично решению задачи 6.

10. Последим за суммарным количеством зеленых и красных листьев. Вчера зеленые и красные листья составляли вместе 2/9 от *вчерашнего* числа листьев на дереве. С другой стороны, сегодня зеленые и красные листья составляют 8/9 от *сегодняшнего* числа листьев на дереве. За ночь суммарное количество зеленых и красных листьев могло лишь уменьшиться, поскольку за ночь некоторые красные листья могли опасть, а некоторые зеленые могли перекраситься в желтые. Следовательно, вчерашние зеленые и красные листья составляли бы не менее 8/9 от сегодняшнего числа листьев на дереве.

Итак, то количество листьев, которое составляло 2/9 от вчерашнего числа листьев на дереве, сегодня составило бы не менее 8/9 от сегодняшнего числа листьев на дереве. Это значит, что за ночь число листьев уменьшилось не менее чем в 4 раза.

11. Рассмотрим квадрат 11×11, расположенный «глубоко внутри» квадрата 2017×2017 (например подойдет квадрат 11×11, центральная клетка которого совпадает с центральной клеткой квадрата 2017×2017). Поскольку в рассматриваемом квадрате 121 клетка, а цветов имеется всего лишь 120, он содержит две клетки одинакового цвета. Нетрудно понять, что эти две клетки всегда можно накрыть одним уголком, выступающим за пределы квадрата 11×11, но целиком лежащим в большом квадрате.



12. Отложим на биссектрисе угла B отрезок BK, равный отрезку BC. Тогда треугольники ACB и DBK равны по двум сторонам и углу. Следовательно, $AB = DK$.

Пусть $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle ACB + \angle CBA = 3\alpha$ — это сумма двух углов треугольника ABC, она меньше $180°$. Значит, $\alpha < 60°$. Тогда угол $\angle KBC = \alpha$ — наименьший угол в равнобедренном треугольнике BKC, поэтому $BC > CK$. Тогда

$$AB + BC = DK + BC > DK + KC > DC.$$

13. Ответ: 31.

Лемма. Если n делится на числа a^5 и на b^5, то n делится и на числа a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4.

Доказательство леммы. Заметим, что $n^5 = n^4 \cdot n$ делится на $a^{20} \cdot b^5$; извлекая корень пятой степени, получаем, что n делится на a^4b. Аналогично, $n^5 = n^3 \cdot n^2$ делится на $a^{15} \cdot b^{10}$, откуда n делится на a^3b^2. Доказательство про остальные два делителя совершенно аналогично.

Перейдем к решению задачи. Докажем оценку, т. е. что количество пятых степеней всегда не превосходит 31. Расположим выписанные делители в ряд в порядке возрастания. Докажем, что между любыми двумя пятыми степенями в этом ряду есть как минимум четыре числа. В самом деле, если a^5, b^5 — делители числа n, то, четыре делителя, указанные в лемме, расположены в ряду между a^5 и b^5: если, скажем, $a > b$, то $a^5 > a^4b > a^3b^2 > a^2b^3 > ab^4 > b^5$.

Если бы в ряду находилось не менее 32 пятых степеней, то в промежутках между ними стояло бы еще как минимум $4 \cdot 31 = 124$ числа, т.е. всего в ряду было бы не меньше 156 чисел — противоречие с условием! Следовательно, больше чем 31 пятых степеней быть не может.

Приведём пример. Пусть $n = 2^{150}$. У этого числа ровно 151 делитель (включая 1 и n), и пятыми степенями среди них являются числа 2^{5k}, $0 \leqslant k \leqslant 30$ — ровно 31 число.