

Решения задач

5. Ответ: на 4 %.

Обозначим сторону большого квадрата через a , а сторону маленького квадрата — через b . В результате вырезания квадрата из периметра листа исчез один отрезочек длины b , а взамен появились три таких отрезочка, т. е. периметр увеличился на $2b$. Значит, $2b$ составляет 10 % от старого периметра: $2b = 0,1 \cdot 4a$. Отсюда $b = 0,2a$. Таким образом, площадь листа уменьшилась на $b^2 = 0,04a^2$, т. е. на 4 %.

6. Ответ: это невозможно.

Допустим, что нам удалось расставить числа в вершинах семиугольника требуемым способом. Если числа a и b стоят в соседних вершинах семиугольника и a делится на b , поставим на стороне семиугольника стрелку, ведущую от a к b (если $a = b$ поставим стрелку произвольно). Такую расстановку стрелок выполним на всех сторонах семиугольника. Каждая стрелка указывает направление обхода многоугольника либо по часовой стрелке, либо против.

Заметим, что никакие две соседние стрелки не могут быть направлены одинаково. Действительно, пара стрелок $a \rightarrow b \rightarrow c$ означает, что a делится на b , b делится на c , и значит, a делится на c , что запрещено условием, поскольку числа a и c соединены диагональю.

Итак, двигаясь вдоль семиугольника мы будем наблюдать, что направления стрелок чередуются. Но это невозможно, поскольку число сторон нечетно. Противоречие.

7. Ответ: наибольшее число кузнечиков, которое можно расставить на доске 2017×100 , равно $2 \cdot 2017 = 4034$.

Эта задача относится к типу «оценка плюс пример».

Оценка. В каждой горизонтали может стоять не более двух кузнечиков. Действительно, если в какую-либо горизонталь поставить трех кузнечиков, какие-то два обязательно окажутся на клетках одинакового цвета, и значит, будут бить друг друга. Поскольку доска содержит 2017 горизонталей, число кузнечиков не может превышать $2 \cdot 2017$.

Пример. Существует много оптимальных расстановок. Например, достаточно занять кузнечиками 4 вертикальных ряда, как показано на рисунке. В каждой горизонтали стоит два кузнечика, поэтому суммарное число кузнечиков равно как раз $2 \cdot 2017$.

