35. Вся сумма не меньше, чем $4 \cdot 20 = 80$ (так как вся табличка празбивается на 4 пары столбцов) и не превосходит $5 \cdot 16 = 80$ (так как табилчка покрывается пятью парами строк с перехлестом по 8-й строке), поэтому она равна 80.

36. Ответ: одновременно танцами и математикой занимается 1 человек.

Пусть a человек занимается только математикой, $b \geqslant 1$ человек занимаются и танцами, и математикой. Тогда по условию $(a+b)^2 = (p+1)a + b$. Вычтем $a+b$ из обеих частей: $(a+b)^2 - (a+b) = pa$. Вынесем за скобки общий множитель в левой части: $(a+b)(a+b-1) = pa$. Так как p простое, одна из скобок в левой части делится на p. Тогда a должно делиться на другую скобку! Но очевидно, первая скобка больше a, а вторая не меньше a. Значит, a может делиться лишь на вторую скобку, причем лишь в случае, когда вторая скобка равна a. Это возможно только при $b = 1$.

37. Ответ: нет, Вася не мог получить исходное число, его результат должен быть существенно больше.

Ясно, что в числе не более одного нуля, поскольку иначе произведение было бы равно 0, значит есть хотя бы 99 цифр, не меньших 1, тогда в произведении хотя бы $99 \cdot 49$ сумм, не меньших 2. Но даже двойка в такой огромной степени уже сильно больше, чем 10^{100}, т.е. чем исходное 100-значное число!

38. Ответ: 3 хода (король посетит 4 клетки).

Правило, по которому ходит шахматный король, дает возможность обойти клетки произвольного квадратика 2×2, лежащего внутри доски, в любом порядке, поэтому Петя всегда сможет сделать три хода королем: он выберет любой такой квадратик, поставит короля на наименьшее число в этом квадратике, потом сдвинет его на следующее по величине число, потом опять на следующее по величине и, наконец, на максимальное число в этом квадратике. Покажем, как следует раскрасить доску, чтобы Петя не смог сделать на ней больше трех ходов королем. Разобьем клетчатую плоскость на квадратики 2×2 (некоторые квадратики будут выходить за край доски). Пусть Вася расставляет числа на доске по возрастанию: сначала в левые верхние угловые клетки квадратиков, потом, когда все эти клетки уже заполнены, он продолжает расставлять числа в правые верхние клетки, когда и они будут заполнены, Вася начнет заполнять левые нижние клетки, и в самом конце — правые нижние. На такой доске король не сможет сделать больше трех ходов.

39. Ответ: Саша выиграет.

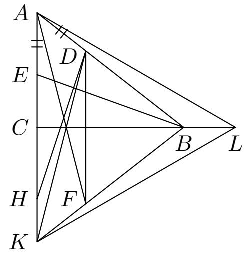
Покажем, что Саша может на каждом ходу писать такую цифру, чтобы при любом выборе двух цифр Андреем, полученное в результате число не будет делиться на 2018.

Пусть Саше досталось число N, и к этому моменту он еще не проиграл (т. е. N не кратно 111). Если Саша допишет цифру 0, то после хода Андрея на доске окажется одно из ста чисел от $1000N$ до $1000N + 99$. Если Саша допишет цифру 1, то после хода Андрея получится число от $1000N + 100$ до $1000N + 199$. Аналогичные промежутки из 100 чисел можно записать для любого другого хода Саши. Последний из них (если Саша напишет цифру 9) состоит из чисел от $1000N + 900$ до $1000N + 999$.

Предположим, что для любой Сашиной цифры Андрей сможет выбрать из соответствующего промежутка число, кратное 111. Это значит, что среди чисел от $1000N$ до $1000N + 999$ содержится не менее десяти чисел, кратных 111. Но они помещаются туда с большим трудом: разность первым и десятым из них должна быть не менее $9 \cdot 111 = 999$, что как раз совпадает с максимальным «разбросом» наших чисел. Следовательно, это возможно, лишь если первое из чисел, кратных 111, равно $1000N$, а десятое — $1000N + 999$. Однако, число $1000N$ не кратно 111, ибо по нашему предположению число N не делится на 111.

Итак, Саша может каждый раз делать такой ход, чтобы Андрей следующим своим ходом не выиграл. Осталось понять, что выиграет Саша, для этого ему нужно получить число из ровно 2018 цифр. Это, разумеется, произойдёт: после 671 пар ходов и еще одного хода Саши получится как раз $4 + 3 \cdot 671 + 1 = 2018$ цифр.

40. При движении точки E по отрезку CA в сторону точки A длина отрезка BE возрастает, поскольку возрастает длина проекции этого отрезка на сторону CA. Поэтому достаточно доказть неравенство для случая $AE = AD$.



Пусть точка K симметрична точке A относительно BC. В прямоугольном треугольнике ABC угол A меньше $60°$, по- скольку угол B больше $30°$. Отложим на луче CB точку L так, чтобы $\angle CAL = 60°$ Тогда точка B лежит на отрезке CL и $AB < AL$. В силу симметрии треугольник ALK равносторонний, $AF = KD$. Отложим на отрезке AK такую точку H, что $AH = AB$. Тогда треугольники ABE и AHD равны по двум сторонам и углу, следовательно, $HD = BE$. Следовательно, $KD > HD$. Тогда $AF = KD > HD = BE$.

41. Ответ: при всех нечетных n, кроме $n = 101$.

То, что n не может быть равно 101 — очевидно: соединим вершины, связанные ребром, путем длины 100. Покажем, что для остальных нечетных n цикла может не найтись. Для $n > 101$ примером служит полный граф на 101 вершине.

Для $n < 100$ возможен следующий пример — “мультицикл длины 101”. Пусть вершины графа разбиты на непересекающиеся множества $A_1, \ldots A_{101}$? причем каждое множество A_i состоит из 100 вершин. Пусть ребра проведены так, что множества A_i и A_{i+1} образуют полный двудольный граф (нумерация циклическая) и никаких других ребер нет. В таком графе любые две вершины можно соединить путем длины 100: Любые две вершины из одной компоненты A_i можно соединить путем длины 100, который попеременно ходит из компоненты A_i в A_{i+1} и обратно. Чтобы соединить две вершины из компонент A_i и A_j, где $j > i$ нужно проложить путь из компоненты A_i в компоненту A_j по возрастанию индексов, если числа i и j разной четности и по убыванию (с проходом из компоненты A_1 в A_{101}) — если одинаковой. Далее этот путь следует дополнить подходящим «зигзагом» между компонентами A_j и A_{j+1}. Коротких циклов нечетной длины в этом графе нет, покольку получить нечетный цикл можно только если он «циклически» обойдет все компоненты, а тогда его длина не меньше 101.