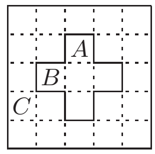
29. Допустим, что числа a и b различны: пусть, например, $a > b$. Среди выписанных на доске чисел есть две единицы: одна из них — делитель a, другая — делитель b. Поскольку произведения во всех Катиных парах равны, два самых маленьких числа (единицы) должны соседствовать в парах с двумя самыми большими (и одинаковыми) числами с доски. Но самое большое число на доске лишь одно — это a. Противоречие.

Следовательно, наше допущение неверно, то есть $a = b$.

30. Ответ: в пять цветов.



Рассмотрим крестик из пяти клеток, центральная клетка которого совпадает с центральной клеткой квадрата. По условию, три клетки в его столбце имеют разные цвета. Аналогично цвета трех клеток в его строке различны. Наконец, любые две клетки «на концах» крестика тоже разного цвета. Например, клетки A и B на рисунке имеют разные цвета, так как по условию среди клеток A, B, C нет одноцветных. Таким образом, цвета всех пяти клеток в крестике различны, поэтому цветов заведомо не меньше пяти.

Пример раскраски в пять цветов приведен справа. В этом примере каждая следующая строчка получается из предыдущей циклическим сдвигом на две клетки влево.

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

31. Ответ: за столом 200 лжецов.

Ясно, что рыцари дали по два одинаковых ответа, поэтому разница между суммами Антона и Ани могла возникнуть из-за того, что некоторые лжецы дали Антону и Ане разные ответы. При этом ответы любого лжеца отличаются лишь на 1 или на 2. Суммарная разность 400 могла набраться, только если лжецов было не меньше чем 200.

Разобьем всех сидящих за столом людей на группы подряд сидящих рыцарей и группы подряд сидящих лжецов. Каждому лжецу, который дал Ане ответ на 1 меньше, чем Антону, дадим банан, а лжецам, которые дали Ане ответ на 2 меньше, чем Антону, дадим по два банана. Лжецов, которые не изменили или вообще увеличили свой ответ, оставим без бананов. Суммарное *уменьшение* всех ответов больше или равно 400 (оно может быть строго больше, если некоторые лжецы увеличили свои ответы), поэтому все действующие лица получили не менее 400 бананов.

Заметим, что два банана могли получить лишь лжецы, находящиеся по краям своих групп. Действительно, такой лжец должен был ответить Антону «два», а Ане — «ноль», и оба ответа должны быть ложными; следовательно, этот лжец на самом деле соседствует ровно с одним лжецом и одним рыцарем. Попросим каждого из лжецов, имеющих два банана, отдать один из своих бананов стоящему рядом рыцарю. После этого у всех трехсот сидящих за столом лжецов окажется не более чем по одному банану, а у рыцарей — не более чем по два. Поскольку бананов не менее 400, количество рыцарей доолжно быть не меньше 100. Тогда лжецов не более 200. Но ведь мы уже установили в начале, что лжецов должно быть не меньше 200. Значит, за столом сидит ровно 200 лжецов.

32. Ответ: выиграет Саша.

Покажем, что Саша может на каждом ходу писать такую цифру, чтобы при любом выборе двух цифр Андреем, полученное в результате число не будет делиться на 2018.

Пусть Саше досталось число N. Если Саша допишет цифру 0, то после хода Андрея на доске окажется одно из ста чисел от $1000N$ до $1000N + 99$. Если Саша допишет цифру 1, то после хода Андрея получится число от $1000N + 100$ до $1000N + 199$. Аналогичные промежутки из 100 чисел можно записать для любого другого хода Саши. Последний из них (если Саша напишет цифру 9) состоит из чисел от $1000N + 900$ до $1000N + 999$.

Предположим, что для любой Сашиной цифры Андрей сможет выбрать из соответствующего промежутка число, кратное 112. Это значит, что среди чисел от $1000N$ до $1000N + 999$ содержится не менее десяти чисел, кратных 112. Но они туда просто не поместятся: разность между первым и десятым из них должна быть не менее $9 \cdot 112 = 1008$, а максимальный «разброс» наших чисел равен 999.

Итак, Саша может каждый раз делать такой ход, чтобы Андрей следующим своим ходом не выиграл. Осталось понять, что выиграет Саша, для этого ему нужно получить число из ровно 2018 цифр. Это, разумеется, произойдёт: после 671 пар ходов и еще одного хода Саши получится как раз $4 + 3 \cdot 671 + 1 = 2018$ цифр.

34. О т в е т: воз переместился на $(m-n)n$ метров.

Как нетрудно видеть, воз остановился, когда Щука подала m-ю команду, а Рак — n-ю команду. Для удобства промежуток времени между последовательными командами Щуки (а также промежуток между полночью и первой командой) будем называть *часом* (это не приведет к недоразумению, так как соображения о длительности такого *часа* мы использовать не будем). Таким образом с полуночи до окончания поездки прошло m *часов*. Так как $m > n$, в течение *часа* Рак мог скомандовать не более одного раза.

Рассмотрим *час*, содержащий k-ю по счету команду Рака, а также *час*, на который пришлась $(n-k)$-я команда Рака. На рисунке ниже мы взяли $k = 2$, интересующие нас часы выделены на оси времени фигурными скобками. Так как вся поездка длилась целое число *часов*, k-я команда Рака дана по прошествии mk минут после полуночи, а $(n-k)$-я команда Рака дана за mk минут до остановки, рассматриваемые *часы* симметричны: в первом из них от начала *часа* до команды Рака прошло столько же минут, сколько во втором от команды Рака до конца *часа*. Тогда ясно, что в течение этих двух *часов* воз проехал равные расстояния на север и на юг. (Для рассматриваемых *часов* интервалы времени, когда воз двигался на юг, изображены на рисунке сплошной линией, а на север — штриховкой.)

Следовательно, перемещение воза определяется лишь теми *часами*, во время которых не было подано команд Рака. Таких *часов* $m-n$, в течение каждого из них воз ехал n минут на юг.

Итак, Саша может каждый раз делать такой ход, чтобы Андрей следующим своим ходом не выиграл. Осталось понять, что выиграет Саша, для этого ему нужно получить число из ровно 2018 цифр. Это, разумеется, произойдёт: после 671 пар ходов и еще одного хода Саши получится как раз $4 + 3 \cdot 671 + 1 = 2018$ цифр.