— —   — —

66. Заменив при необходимости знаки у a, b и c, можем считать, что $a > 0$. $P(x) + (ax^2 + bx + c) = (a + b + c)(x^2 + x + 1)$, откуда $a + b + c \geqslant 0$ (так как правая часть ограничена снизу), и сумма минимумов левых частей не больше минимума правой, откуда $\frac{4ac-b^2}{4a} < \frac{3}{4}(a + b + c)$. Неравенство получается строгим.

67. Пусть в графе есть цикл и пусть он проходит по горизонтальному отрезку a1. Возьмем ромб, примыкающий к стороне a1, и отметим в нем параллельную сторону a2. Возьмем ромб, примыкающий к стороне a2, и отметим в нем параллельную сторону a3. И так далее.

Такую же конструкцию провернем в другую сторону: Возьмем ромб, примыкающий к стороне a1 с другой стороны, и отметим в нем параллельную сторону a0. И так далее.

Мы получили “полосу ширины a”, которая рассекает наш шестиугольник. При этом цикл заведомо пересекает эту полосу, но все время в направлении справа налево. Этого не может быть.

68. Введем переобозначение: будем считать, что нам даны два таких иррациональных параметра α и β, что при всех $x > 0$ выполнено равенство $\left[\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta}x\right]\right] = \left[\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{\alpha}x\right]\right]$. По-прежнему требуется доказать, что $\alpha = \beta$.

Обозначим через $\lceil x \rceil$ верхнюю целую часть числа x, т. е. наименьшее целое число, которое больше либо равно x. Положим $f_{\alpha,\beta}(x) = \left[\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta}x\right]\right]$ и найдем, при каких натуральных n выполняется неравенство $f_{\alpha,\beta}(x) \geqslant n$. Имеем

$$\begin{gathered} f_{\alpha,\beta}(x) \geqslant n \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta}x\right]\right] \geqslant n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta}x\right] \geqslant n \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{\beta}x\right] \geqslant \alpha n \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{\beta}x\right] \geqslant \lceil \alpha n \rceil \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\beta}x \geqslant \lceil \alpha n \rceil \\ \Leftrightarrow \quad x \geqslant \beta \lceil \alpha n \rceil \end{gathered}$$

Аналогично неравенство $f_{\beta,\alpha}(x) \geqslant n$ равносильно неравенству $x \geqslant \alpha \lceil \beta n \rceil$.

Поскольку $f_{\alpha,\beta}(x) = f_{\beta,\alpha}(x)$, мы приходим к выводу, что при всех натуральных n выполняется равенство $\beta \lceil \alpha n \rceil = \alpha \lceil \beta n \rceil$ или

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lceil \alpha n \rceil}{\lceil \beta n \rceil}.$$

Осталось выяснить, почему при $\alpha \neq \beta$ это невозможно. Читатель с легкостью разберется с этим самостоятельно.