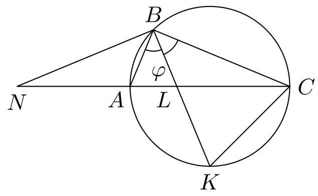
19. Ответ: на 21,6%.

Обозначим длину ребра большого куба через a, а длину ребра вырезанного кусочка — через b. В результате выедания кусочка из поверхности сыра исчез один квадратик площади b^2, а взамен появилось пять таких же квадратиков, т. е. площадь поверхности увеличилась на $4b^2$. Значит, $4b^2$ составляет 24 % от старой площади поверхности: $4b^2 = 0{,}24 \cdot 6a^2$. Отсюда $b = 0{,}6a$. Таким образом, объем куска сыра уменьшился на $b^3 = 0{,}216a^3$, т. е. на 21,6 %.

20. Обозначим $\angle BLN = \varphi$. Тогда



$$\angle BCK = \angle BCA + \angle ACK = \frac{1}{2}(\breve{AB} + \breve{AK}) = \frac{1}{2}(\breve{AB} + \breve{CK}) = \varphi.$$

Заметим, что $\angle LBN = 90°$, как угол между внешней и внутренней биссектрисами треугольника. Тогда $BK = BN = BL \operatorname{tg} \varphi$, следовательно,

$$\frac{BK}{\sin\varphi} = \frac{BL}{\cos\varphi}.$$

Из треугольника LBN мы видим, что правая часть этого равенства равна NL, а левая часть по теореме синусов для треугольника BCK равна удвоенному радиусу окружности, чтд.

21. Ответ: не может.

Лемма: Если n делится на числа a^3 и на b^3, то n делится на числа a^2b и ab^2.

Доказательство леммы полностью аналогично лемме из задачи 13.

Вернемся к задаче. Расположим выписанные делители в ряд в порядке возрастания. Докажем, что между любыми двумя точными кубами в этом ряду есть как минимум два числа. В самом деле, если a^3, b^3 — делители числа n, два делителя, указанные в лемме, расположены в ряду между a^3 и b^3:

Итак, если бы в ряду было 35 точных кубов, то в промежутках между ними стояло бы еще как минимум $2 \cdot 34 = 68$ чисел, т. е. всего в ряду было бы не меньше 103 чисел. Противоречие.

22. Ответ: $f(1) = 5$.

Рассмотрим квадратный трехчлен $h(x) = 2g(x) - f(x)$. Соотношения в условии состоят в том, что числа 2 и 3 являются корнями этого квадратного трехчлена. Поэтому

$$2g(x) - f(x) = a(x-2)(x-3),$$

где a — старший коэффициент этого трехчлена.

Подставим теперь в это равенство $x = 5$ и узнаем, что

$$2 \cdot 2 - 7 = 2g(5) - f(5) = a(5-2)(5-3) = 6a,$$

откуда $a = -\frac{1}{2}$. Теперь, подставляя в то же равенство $x = 1$, найдём

$$2 \cdot 2 - f(1) = -\frac{1}{2}(1-2)(1-3) = -1,$$

откуда $f(1) = 5$.

23. Ответ: $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Докажем вначале, что $c \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Из условия следует, что для любой отмеченной точки расстояние от неё до любой другой отмеченной точки (кроме ближайшей) превосходит расстояние до ближайшей хотя бы в c раз.

Предположим, что нашлись три такие отмеченные точки A, B и C, что ближайшей к A является точка B, а ближайшей к B — точка $C \neq A$. Пусть $AB = x$. Поскольку AB — кратчайшее расстояние от точки A, то $AC \geqslant cx$. Поскольку BC — кратчайшее расстояние от точки B, то $BC \leqslant \frac{x}{c}$. Тогда по неравенству

21. Ответ: не может.

Лемма: Если n делится на числа a^3 и на b^3, то n делится на числа a^2b и ab^2.

Доказательство леммы полностью аналогично лемме из задачи 13.

Вернемся к задаче. Расположим выписанные делители в ряд в порядке возрастания. Докажем, что между любыми двумя точными кубами в этом ряду есть как минимум два числа. В самом деле, если a^3, b^3 — делители числа n, два делителя, указанные в лемме, расположены в ряду между a^3 и b^3:

Итак, если бы в ряду было 35 точных кубов, то в промежутках между ними стояло бы еще как минимум $2 \cdot 34 = 68$ чисел, т. е. всего в ряду было бы не меньше 103 чисел. Противоречие.

22. Ответ: $f(1) = 5$.

Рассмотрим квадратный трехчлен $h(x) = 2g(x) - f(x)$. Соотношения в условии состоят в том, что числа 2 и 3 являются корнями этого квадратного трехчлена. Поэтому

$$2g(x) - f(x) = a(x-2)(x-3),$$

где a — старший коэффициент этого трехчлена.

Подставим теперь в это равенство $x = 5$ и узнаем, что

$$2 \cdot 2 - 7 = 2g(5) - f(5) = a(5-2)(5-3) = 6a,$$

откуда $a = -\dfrac{1}{2}$. Теперь, подставляя в то же равенство $x = 1$, найдём

$$2 \cdot 2 - f(1) = -\frac{1}{2}(1-2)(1-3) = -1,$$

откуда $f(1) = 5$.

23. Ответ: $c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Докажем вначале, что $c \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Из условия следует, что для любой отмеченной точки расстояние от неё до любой другой отмеченной точки (кроме ближайшей) превосходит расстояние до ближайшей хотя бы в c раз.

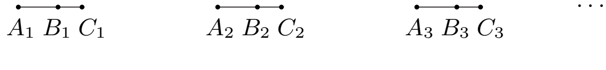
Предположим, что нашлись три такие отмеченные точки A, B и C, что ближайшей к A является точка B, а ближайшей к B — точка $C \neq A$. Пусть $AB = x$. Поскольку AB — кратчайшее расстояние от точки A, то $AC \geqslant cx$. Поскольку BC — кратчайшее расстояние от точки B, то $BC \leqslant \dfrac{x}{c}$. Тогда по неравенству треугольника

$$x + \frac{x}{c} \geqslant AB + BC \geqslant AC \geqslant cx, \qquad (*)$$

откуда $c^2 - c - 1 \leqslant 0$. Это значит, что число c лежит на числовой прямой между корнями квадратного трехчлена $t^2 - t - 1$. В частности, $c \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, что и требовалось.

Если же такой тройки точек не существует, то все точки разбиваются на пары (в каждой паре точки ближайшие друг к другу). Но это невозможно, ибо количество точек нечетно!

Осталось привести пример, в котором $c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. В этом нам поможет первая часть решения: в неравенстве $(*)$ равенство достигалось в случае, когда точка B лежит на отрезке между A и C и, например, $AB = 1$, $BC = \dfrac{1}{c}$, $AC = 1 + \dfrac{1}{c} = c$. Отметим на плоскости 33 таких тройки точек A_1, B_1, C_1, $\ldots$, A_{33}, B_{33}, C_{33},



причем расположим их настолько далеко друг от друга, чтобы все расстояния между точками из разных троек были больше c. Тогда для каждой точки A_i ближайшими будут точки B_i и C_i, причем $A_iC_i : A_iB_i = c : 1 = c$; для каждой точки B_i ближайшими будут C_i и A_i, причем $B_iA_i : B_iC_i = 1 : (1/c) = c$; и, наконец, для каждой точки C_i ближайшими будут точки B_i и C_i, причем $C_iA_i : C_iB_i = c : (1/c) = c^2 > c$. Требование задачи выполнено.