56. Ответ: Миша сможет объехать $n-k$ городов, если $k \leqslant n-3$, и 2 города в противном случае (при $k = n-2$ эти ответы совпадают).

В случае $k \geqslant n-2$, пока Миша едет из первого города во второй, Президент разрушит все остальные $n-2$ дороги, ведущие из второго города, и Миша сможет посетить лишь эти два города.

Пусть $k \leqslant n-3$. Пусть Миша приехал в город X, и в этот момент есть $k+1$ городов, в которых он еще не был. Тогда Миша сможет продолжить свой путь, поехав в один из них. В самом деле, дороги, ведущие из X в эти города, могли быть разрушены только во время последней Мишиной поездки (пока он ехал в X), но президент не мог сразу разрушить все эти дороги, ибо их больше чем k.

Таким образом, Миша может попасть в тупик лишь если осталось не более k не посещенных им городов, т. е. если он проехал не менее $n-k$ городов.

С другой стороны, президент может изначально выбрать некоторые k «особо ценных» городов своей страны, и во время каждого Мишиного перемещения стирать дороги из города, в который Миша едет, в эти k городов. Этим он не даст Мише попасть в эти города, т. е. Миша посетит заведомо не более $n-k$ городов.

57. Обозначим соседние вершины 2019-угольника буквами A, B, C и D (по часовой стрелке). Пусть вершины B и C не являются отмеченными. Рассмотрим углы 2019-угольника, идущие через один против часовой стрелки, начиная с A и заканчивая D. Обозначим их сумму через u. Рассмотрим оставшиеся углы, обозначим их сумму v. Поскольку при удалении вершины B получается интересный 2018-угольник, имеем равенство сумм углов

$$u - \angle CAB = v - \angle ACB - \angle ABC \qquad (*)$$

(угол $\angle B$ не входит в этот многоугольник, а углы $\angle A$ и $\angle C$ надо уменьшить на $\angle CAB$ и $\angle ACB$ соответственно). Аналогично, поскольку при удалении вершины C получается интересный 2018-угольник, имеем равенство сумм углов

$$u - \angle CDB = v - \angle CBD - \angle BCD. \qquad (**)$$

Вычтем из равенства $(**)$ равенство $(*)$, получим

$$\angle CAB - \angle CDB = \angle ACB + \angle ABC - \angle CBD - \angle BCD = \angle ABD - \angle ACD.$$

Прибавив к нему верное равенство $\angle CAB + \angle ABD = \angle CDB + \angle ACD$, получим, что $\angle CAB = \angle CDB$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписанный. Отметим также, что верно и обратное. А именно, если выполняется равенство $(*)$ (т. е. 2018-угольник без вершины B — интересный) и четырехугольник $ABCD$ вписанный, то верно и равенство $(**)$, а значит, 2018-угольник без вершины C — интересный.

Последовательно действуя таким образом, мы докажем, что исходный 2019-угольник является вписанным. Следовательно, если рассмотреть отмеченную вершину P и соседнюю с ней вершину Q, то из интересности 2018-угольника без вершины Q и вписанности 2019-угольника мы получим, что 2018-угольник без вершины P — интересный.

58. Ответ: 2 варианта для нечётных n и $n+1$ вариант для чётных n.

Заметим, что операция обратима. Для нечётного n покажем, что можно все монеты одинаково ориентировать. Разобьём монеты на группы подряд идущих монет, имеющих одинаковую ориентацию. Если групп хотя бы две, то они чередуются, поэтому их чётное число. Следовательно, хотя бы в одной группе чётное число монет. Перевернув эти монеты, мы уменьшим количество групп. Последовательно уменьшая число групп такими действиями, мы можем сделать всего одну группу и, значит, повернуть все монеты одинаково. Таким образом, имеется не более двух вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга. Поскольку операция не меняет чётность числа орлов, расположение со всеми орлами нельзя перевести в расположение со всеми решками. Стало быть, вариантов расположения ровно два.

Перейдем теперь к случаю чётного n. Научимся переводить расположения монет в конфигурацию как можно более простого вида, а затем посчитаем количество таких простых конфигураций, которые нельзя получить друг из друга. Отметим на окружности точку возле любой из монет. Разобьём монеты на группы подряд идущих монет, имеющих одинаковую ориентацию. Будем переворачивать группы, в которых чётное число монет, до тех пор, пока такие группы не исчезнут или не останется ровно одна группа. Если осталось несколько групп, то они все нечётны. Отметим, что если в какой-то группе есть хотя бы три монеты, то две из них можно перекинуть в соседнюю группу. Действительно, это можно сделать заменами

$$\text{ОР}\boxed{\text{ОО}}\text{О} \to \text{ОРРРО}. \qquad (*)$$

Таким образом, все сведем к конфигурации, в которой есть одна большая группа, а остальные монеты чередуются. Более того, можно считать, что первая монета большой группы находится возле отмеченной точки. Таким образом, конфигурации различаются лишь количеством монет в большой группе и их ориентацией. Если группа ровно одна, то ориентация не имеет значения, поскольку все монеты можно перевернуть.

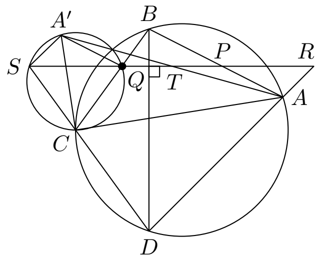
Покажем, что все остальные конфигурации нельзя получить друг из друга. Действительно, наша операция не меняет разность количества орлов на чётных местах и количества орлов на нечётных местах. Когда большая группа состоит из одного орла, т. е. когда все орлы стоят на нечётных местах, а решки на чётных, эта разность равна $n/2$. Увеличение количества орлов в большой группе уменьшает эту разность на 1, поэтому все разности от 0 до $n/2$ возможны. Аналогично, когда большая группа состоит из решек получатся разности от -1 до $-n/2$. Итого получаем $n+1$ различную конфигурацию.

59. Докажем, что $f(0)$ делится на все простые числа, меньшие 20, из этого будет следовать $f(0) = 0$, так как это произведение слишком велико.

Действительно, пусть $f(0)$ не кратно какому-то p. Тогда $x \equiv 0 \pmod p$ не может являться решением ни одного из уравнений из условия (левая часть не делится на p, а правая часть делится).

Но очевидно, что решения уравнений $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $\ldots f(x) = px$ должны давать попарно различные остатки при делении на p при условии, что эти остатки ненулевые. Однако уравнений у нас p, а возможных остатков $p - 1$ – противоречие.

60. Обозначим через T середину отрезка PQ. Пусть точка A' симметрична точке A относительно точки T. Треугольники $SA'Q$ и RAP симметричны и, следовательно, равны. Тогда



$$\angle SA'Q = \angle RAP = 180^\circ - \angle BAD = \angle QCD,$$

следовательно, точка A' лежит на окружности CQS. Проверим, что угол $\angle A'CA$ прямой. Действительно, заметим, что $\angle A'CQ = \angle A'SQ = \angle PRA$, $\angle BCA = \angle BDA$. Складывая эти равенства, получаем, что

$$\angle A'CA = \angle A'CQ + \angle BCA = \angle PRA + \angle BDA = 90^\circ.$$

Теперь утверждение задачи следует из того, что в прямоугольном треугольнике $AA'C$ медиана равна половине гипотенузы.

61. Будем много раз пользоваться очевидным неравенством

$$x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x+y)^2. \qquad (*)$$

Обозначим левую часть доказываемого неравенства через L. Заметим, что

$$2L = (a^2 - c^2)^2 + (c^2 - b^2)^2 + (a^2 - d^2)^2 + (d^2 - b^2)^2 + 2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2.$$

По неравенству $(*)$ имеем

$$(a^2 - c^2)^2 + (c^2 - b^2)^2 \geqslant \frac{(a^2 - b^2)^2}{2} = (a-b)^2 \cdot \frac{(a+b)^2}{2},$$
$$(a^2 - d^2)^2 + (d^2 - b^2)^2 \geqslant \frac{(a^2 - b^2)^2}{2} = (a-b)^2 \cdot \frac{(a+b)^2}{2} \quad \text{и}$$
$$(ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 \geqslant \frac{(ac - bd + ad - bc)^2}{2} = (a-b)^2 \cdot \frac{(c+d)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$2L \geqslant (a-b)^2(a+b)^2 + (a-b)^2(c+d)^2 = (a-b)^2\big((a+b)^2 + (c+d)^2\big) \geqslant \geqslant (a-b)^2(4ab + 4cd) \geqslant (a-b)^2 \cdot 8\sqrt{abcd}.$$

62. Ответ: $a = b$.

Для каждого k, $0 \leqslant k \leqslant n$ обозначим через M_k множество маршрутов шашки, ведущих из левого нижнего в правый верхний угол доски $n \times n$, и делающих ровно $2k$ шагов ниже главной диагонали. Имеет место потрясающий факт: при фиксированном n все множества M_k содержат поровну элементов!

Это утверждение называется теоремой Чанга–Феллера, оно впервые доказано МакМагоном в 1909 г. Приводимое ниже комбинаторное доказательство появилось в 1955 г.

Предъявим взаимно однозначное соответствие между множествами M_k и M_{k+1}, $0 \leqslant k \leqslant n$. Маршрут шашки можно интерпретировать как последовательность из $2n$ букв «в» или «п», причем букв каждого вида в ней поровну. Рассмотрим произвольный маршрут a из множества M_k. Запишем его в виде

$$a = u\mathbf{в}v\mathbf{п}w,$$

где «**в**» обозначает первый ход, который шашка сделала вверх, находясь на диагонали; «**п**» — это ход, которым она впервые после этого вернулась на диагональ; u — это, возможно, пустая последовательность ходов, которые шашка совершила до выполнения хода **в** (эти ходы были сделаны ниже диагонали); v — это, возможно, пустая последовательность ходов, которые шашка совершила после выполнения хода **в**, но до выполнения хода **п** (эти ходы были сделаны выше диагонали); наконец, w — это все остальные ходы шашки.

Поставим в соответствие маршруту следующий маршрут b из множества M_{k+1}:

$$b = v\mathbf{п}u\mathbf{в}w.$$

Это соответствие биективно.