Второй тур

6 класс

29. На доске написаны 10 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых четырёх из них кратно 30. Докажите, что хотя бы одно из написанных чисел само по себе кратно 30. (*А. Голованов*)

30. Назовём *перестройкой* натурального числа перестановку любых двух его соседних цифр. Найдите все 19-значные числа, которые в результате любой перестройки, кроме, быть может, одной, увеличиваются. (*С. Берлов*)

31. Хулиган Вася проживает в N-этажном доме с лифтом (оборудованным кнопками с номерами всех этажей от первого до N-го). Вася покатался на лифте, и теперь этот лифт не всегда реагирует на нажатие кнопки. Именно, если, находясь на a-м этаже, нажать на кнопку b-го этажа, лифт поедет туда только при выполнении одного из двух условий: если $a+b$ делится на 2017 или если $a-b$ делится на 2018. В ответ на критику Вася говорит, что с помощью этого лифта можно добраться с любого этажа на любой другой. При каком наименьшем N это может быть правдой? (*А. Солынин*)

32. На очень большой доске записано натуральное число 100...000 (2017 нулей). Вася и Петя по очереди делают ходы, начинает Петя. Каждый игрок может стереть написанное на доске число и заменить его на меньшее число, не являющееся его делителем. Игрок, который не может этого сделать, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни ходил другой? (*А. Чухнов*)

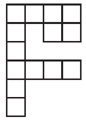
33. Все клетки доски 8×9 покрашены в серый цвет. В противоположных углах доски стоят фигуры «БКС-маляр» и «БСК-маляр». Из клетки, в которой стоит БКС-маляр, он может перейти в любую соседнюю (по стороне) свободную клетку и перекрасить её: из белого цвета — в красный, из красного — в серый, из серого — в белый. БСК-маляр при своём ходе тоже переходит в соседнюю по стороне свободную клетку, но перекрашивает её из белого цвета в серый, из серого в красный, а из красного в белый. Маляры ходят по очереди, первым ходит БКС-маляр. Докажите, что БСК-маляр независимо от ходов первого может действовать так, чтобы серых клеток всегда было не менее 40. *(Е. Куликова)*

34. В школе мальчики составляли целое число процентов от общего числа учащихся. После Нового года в школу пришёл ещё один мальчик и ещё две девочки, и мальчики по-прежнему составляют целое число процентов от общего числа учащихся. Докажите, что в Старом году учащихся было менее двухсот.

(А. Солынин)

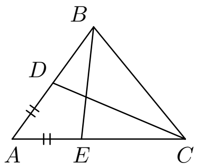
7 класс

35. Какое наибольшее число непересекающихся букв F (см. рисунок) можно вырезать из квадрата 300×300? Фигурки можно поворачивать и переворачивать. *(А. Солынин)*



36. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно, так что $AD = AE$. Докажите, что из отрезков BE, CD и BC можно составить треугольник.

(А. Кузнецов)



37. На доске написаны числа от 1 до 1 000 000. Андрей стёр все простые числа. Затем Надя стёрла все числа, делящиеся на хотя бы одно из чисел

$$2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 100, \qquad 1000,\ 1001,\ 1002,\ \ldots,\ 10000.$$

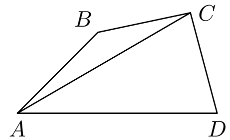
Докажите, что произведение оставшихся чисел является степенью (больше первой) некоторого натурального числа.

(С. Берлов, А. Солынин)

38. В кружке 49 учеников. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых. *(С. Берлов)*

39. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle A = 45°$, $\angle ADC = \angle ACD = 75°$, $AB = CD = 1$. Найдите BC.

(А. Солынин)



40. Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается слева направо и справа налево.

Дано простое число $p \leqslant 2017$. Докажите, что существует палиндром из не более чем 449 цифр, кратный p.

(А. Солынин)

41. В каждой клетке прямоугольника $m \times n$ провели две диагонали, в результате чего прямоугольник оказался разбит на $4mn$ треугольников. Все треугольники покрасили в черный или белый цвет, так что при этом каждый белый треугольник имеет общую сторону хотя бы с одним черным. Какое наименьшее количество черных треугольников могло быть в такой раскраске?

(Н. Власова, С. Берлов)

8 класс

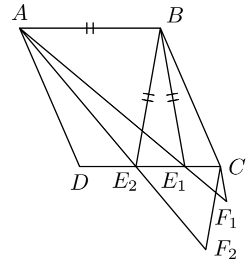
42. См. задачу 35.

43. См. задачу 37.

44. Сережа выписывает в строчку различные числа. Для каждого очередного числа среди написанных ранее количество чисел, бóльших его, и количество чисел, меньших его, отличаются не более чем на 1. Известно, что 84-е число меньше, чем 219-е. Какое число больше: 83-е или 2017-е?

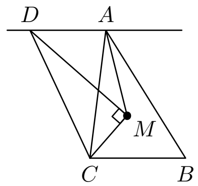
(А. Голованов)

45. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки E_1 и E_2 так, что $AB = BE_1 = BE_2$. На луче AE_1 выбрана точка F_1 так, что $BE_1 \parallel CF_1$, а на луче AE_2 выбрана точка F_2 так, что $BE_2 \parallel CF_2$. Докажите, что $DF_1 = DF_2$. *(А. Кузнецов)*



46. На предприятии работают несколько сотрудников, зарплата каждого составляет целое число тугриков (разные сотрудники могут иметь разную зарплату). Инкассаторы привезли на предприятие n монет по 1 тугрику, n монет по 2 тугрика, ..., n монет по 2017 тугриков. Привезенные деньги — это в точности суммарная зарплата всех сотрудников. При каком наибольшем количестве сотрудников зарплату заведомо удастся раздать (так, что каждый получит в точности причитающуюся ему сумму)? *(В. Франк)*

47. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой, проходящей через точку A параллельно BC, выбрана точка D так, что $\angle CMD = 90°$. Площадь четырехугольника $AMCD$ равна S. Докажите, что $AB \cdot CD \geqslant 2S$. *(А. Кузнецов)*

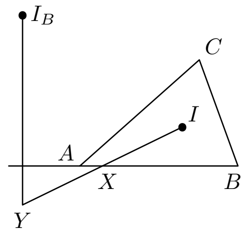


48. Петя и Вася играют в игру: дана клетчатая полоса 1×99, в которой первая и последняя клетки помечены точками. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно закрасить две соседние по стороне незакрашенные клетки. Также один раз за игру (один раз на двоих) можно закрасить одну незакрашенную клетку с точкой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? *(С. Берлов)*

9 класс

49. Сашин компьютер умеет делать две операции. Если в него загрузить карточку с числом a, то он вернет ее назад и напечатает еще карточку с числом $a+1$. Если же в него последовательно загрузить карточки с числами a и b, то он вернет их назад и напечатает карточки со всеми корнями квадратного трехчлена x^2+ax+b (одну, две, или ни одной). Изначально у Саши была лишь карточка с числом s. Верно ли, что при любом $s>0$ Саша сможет в какой-то момент получить карточку с числом $\sqrt{s}$? *(А. Храбров)*

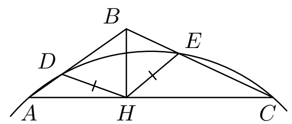
50. В треугольнике ABC на стороне AB нашлась такая точка X, что $2BX = BA + BC$. Точка Y симметрична центру I вписанной окружности треугольника ABC относительно точки X. Докажите, что YI_B перпендикулярно AB, где I_B — центр вневписанной со стороны AC окружности треугольника ABC. *(Ф. Бахарев)*



51. Петя, Вася и Толя играют на доске 100×100 в следующую игру. Они по очереди (начинает Петя, потом Вася, потом Толя, затем Петя и т. д.) закрашивают граничные клетки доски (т. е. имеющие общую сторону с границей доски). Запрещается закрашивать клетку, соседнюю по стороне с уже закрашенной. Кроме того, нельзя закрашивать клетку, симметричную уже закрашенной относительно центра доски. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Могут ли Вася и Толя, договорившись, играть так, чтобы Петя проиграл? *(С. Берлов)*

52. В клетках таблицы $3\times n$ записаны натуральные числа. В каждой из трёх строчек встречается по одному разу числа 1, 2, ..., n. Для каждого столбца сумма попарных произведений стоящих в нём трех чисел кратна n. При каких n это возможно? *(Н. Филонов)*

53. В неравнобедренном треугольнике ABC угол B равен $130°$. Точка H — основание высоты из вершины B. На сторонах AB и BC нашлись точки D и E соответственно, такие что $DH = EH$ и четырехугольник $ADEC$ — вписанный. Найдите угол DHE. *(Д. Ширяев, С. Берлов)*



54. Числа a, b и c лежат в промежутке $[0,1)$ и удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+c^2=1$. Какое наименьшее значение может принимать величина

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}?$$

(А. Храбров)

55. Назовем *клетчатым квадрантом* четверть плоскости, расположенную выше оси X и правее оси Y, разбитую на клеточки со стороной 1. В клетчатом квадранте закрашены n^2 клеток. Докажите, что в этом квадранте найдется не менее n^2+n клеток (в том числе, закрашенных), соседних по стороне с хотя бы одной закрашенной. *(С. Берлов, Д. Ширяев)*

10 класс

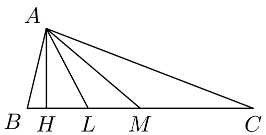
56. У квадратного трехчлена разрешается заменить любой из трех его коэффициентов на его дискриминант. Верно ли, что из любого квадратного трехчлена, не имеющего корней, можно за несколько таких операций получить квадратный трехчлен, имеющий корень? *(А. Кузнецов)*

57. Последовательность (a_n) удовлетворяет соотношениям $a_1 > 10$ и

$$a_n = a_{n-1} + \text{НОД}(n, a_{n-1}) \quad \text{при } n > 1.$$

Известно, что в этой последовательности есть член, в два раза больший своего номера. Докажите, что таких членов бесконечно много. *(А. Храбров)*

58. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM, высоту AH и биссектрису AL. Оказалось, что точки B, H, L, M, C лежат на прямой BC именно в таком порядке, причем $LH < LM$. Докажите, что $BC > 2AL$. *(А. Кузнецов)*



59. На доске написаны числа от 1 до 2000^2. Вася выбрал из них 2000 чисел, сумма которых в 2000 раз меньше суммы всех чисел на доске, и покрасил их в красный цвет. Докажите, что его друг Петя сможет покрасить остальные числа в другие 1999 цветов (в каждый цвет по 2000 чисел) так, чтобы суммы чисел каждого цвета были одинаковы. *(А. Голованов)*

60. Даны положительные числа x, y, z, удовлетворяющие соотношению $\sqrt{xyz} = xy+xz+yz$. Докажите, что $x+y+z \leqslant 1/3$. *(А. Храбров)*

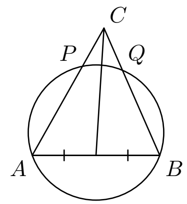
61. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. На описанной окружности треугольника BHM отмечена такая точка D, что $AD \parallel BM$ и точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Докажите, что $BC = BD$. *(А. Кузнецов)*

62. В стране некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением, причем из любого города можно проехать в любой другой. Из каждого города выходит хотя бы две дороги и в каждый город входит хотя бы две дороги. Докажите, что можно найти циклический маршрут и удалить все его дороги так, что по-прежнему из любого города можно будет проехать в любой другой. *(Д. Карпов)*

11 класс

63. Ученики школы посещают m кружков. В каждый кружок ходит ровно mk детей. Докажите, что можно рассадить всех учеников школы по k кабинетам так, чтобы в каждом кабинете был хотя бы один представитель каждого кружка (m и k — натуральные числа). *(Д. Черкашин)*

64. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Медиана из вершины C делит дугу PQ этой окружности пополам. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. *(Д. Максимов)*



65. Числа x, y, z, $t \in (0, \pi/2]$ удовлетворяют условию

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 1\,.$$

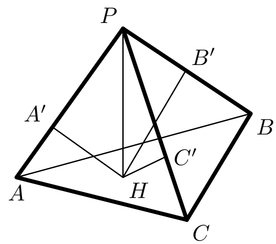
Какое наименьшее значение может принимать величина

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} t?$$

(А. Храбров)

66. Натуральное число n назовём *почти квадратом*, если n можно представить в виде $n = ab$, где a и b — натуральные числа, причем $a \leqslant b \leqslant 1{,}01a$. Докажите, что для бесконечно многих натуральных m среди чисел $m, m+1, m+2, \ldots, m+198$ нет почти квадратов. (*А. Голованов*)

67. В тетраэдре $PABC$ проведена высота PH. Из точки H на прямые PA, PB и PC опущены перпендикуляры HA', HB' и HC'. Плоскости ABC и $A'B'C'$ пересекаются по прямой ℓ. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что прямые OH и ℓ перпендикулярны. (*А. Кузнецов*)



68. В стране некоторые математики знакомы между собой и при любом разбиении математиков на две непустые группы найдутся двое знакомых из разных групп. Известно, что если посадить за круглый стол любой набор из 4 или более математиков так, чтобы любые два соседа были знакомы, то за столом найдутся двое знакомых, не сидящих рядом. Обозначим через c_i количество наборов из i попарно знакомых математиков. Докажите, что $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots = 1$. (*Ф. Петров*)

69. На плоскости дан выпуклый многоугольник с вершинами в целых точках, содержащий внутри начало координат O. Пусть V_1 — множество векторов, идущих из O в вершины многоугольника, а V_2 — множество векторов, идущих из O во все целые точки, содержащиеся внутри и на границе многоугольника (таким образом, V_1 содержится в V_2). Два кузнечика прыгают по целым точкам: каждый прыжок первого кузнечика смещает его на вектор из множества V_1, а второго — из V_2. Докажите, что для некоторого числа c верно следующее утверждение: если оба кузнечика могут допрыгать из O до некоторой точки A, причем второму понадобится для этого n прыжков, то первый сможет сделать это не более чем за $n + c$ прыжков. (*А. Акопян*)