

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ, 2017

Первый тур

6 класс

1. Серёжа отметил в календаре 6 последовательных дней апреля и выписал, на какие числа месяца пришлись эти дни. Получилось 6 последовательных чисел, выписанных по возрастанию. Маша перемножила первые четыре из этих чисел, Таня последние четыре, а Серёжа — все, кроме двух крайних. У Маши и Тани последние цифры результатов совпали, а у Серёжи получилась другая последняя цифра. Какая? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет. (А. Голованов)

1	0	-1	-2	-3	-4
апреля	апреля	апреля	апреля	апреля	апреля
суббота	fredag	jueves	mercredi	wtorek	monday

2. На Урюпинской Кольцевой автомобильной дороге расположено пять деревень. Из каждой деревни в какие-то две из других деревень можно добраться на автобусе за 2 часа, а в остальные две — на велосипеде за 4 часа (не делая остановок по дороге и проезжая по пути не более одной деревни). Скорость автобуса всегда одинакова, скорость велосипеда тоже всегда одинакова и меньше скорости автобуса. За сколько времени можно объехать на автобусе всю кольцевую дорогу? (А. Голованов)

3. В таблице с 4 строками и 9 столбцами имеется 9 красных клеток, 11 синих и 16 белых. Если щелкнуть мышкой по строке или по столбцу, произойдет следующее: если в этой линии клеток какого-то цвета было больше, чем каждого из двух других

цветов, то вся линия перекарасится в этот цвет; если же такого цвета не было, то ничего не произойдет. Оказалось, что если щелкнуть сначала по всем строкам, а затем по всем столбцам, то все клетки станут красными. А если вместо этого щелкнуть сначала по всем столбцам, а потом по всем строкам, то все клетки станут синими. Приведите пример такой таблицы.

(О. Иванова)

4. Во дворе стоят 5 домов, в них живет 5, 15, 25, 35, 45 человек. Известно, что у каждого есть не менее двух тезок среди жителей двора. Докажите, что у кого-то есть тезка в своем доме.

(О. Иванова)

7 класс

5. Справа изображена таблица, заполненная “змейкой”: в первой строке слева направо выписаны по возрастанию числа, начиная с 1, потом этот ряд чисел продолжается во второй строке справа налево, потом в третьей строке — снова слева направо и т. д. У Андрея есть более крупная таблица, тоже заполненная змейкой, начиная с числа 1. В ней нашелся фрагмент 2×2 с числами

13	12
32	33

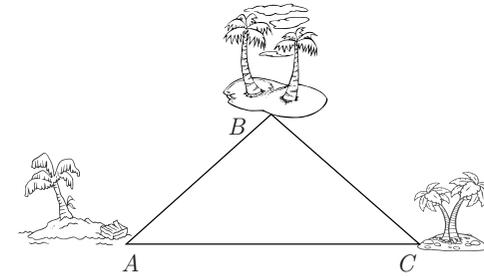
. Сколько столбцов в таблице Андрея? Приведите все возможные варианты ответа и докажете, что других нет.

(А. Сольнин)

6. На доске написано 10 натуральных чисел. Все их последние цифры различны. Кроме того, все их предпоследние цифры различны. Докажите, что сумма этих десяти чисел не может быть точным квадратом.

(А. Голованов)

7. В океане расположено три острова A , B и C , причем расстояния от A до B и от B до C — по 50 км, а от A до C — 70 км. Одновременно из A в C отправилась яхта, а из C в B — катер, оба со скоростью 10 км/ч. Через два часа яхта села на мель и стала подавать сигнал бедствия. Катер тут же изменил курс, увеличил скорость вдвое и последовал к яхте. С острова B



к яхте отправилась спасательная лодка со скоростью 20 км/ч. Докажите, что лодка и катер доберутся до яхты одновременно.

(А. Кузнецов)

8. Вдоль дороги в стране Дураков растут 10 кустов, на каждом кусте по 9 монет. Прохожие должны срывать с каждого куста 2, 3 или 4 монеты, но при этом никто не должен срывать поровну монет с соседних кустов, иначе охранники арестуют нарушителя. Алиса, потом Буратино и после них Василио прошли вдоль дороги и сорвали все монеты. Алиса сорвала не менее 35 монет. Докажите, что один из двух других сорвал меньше 26 монет.

(К. Сухов)

8 класс

9. Стоимость алмаза в рублях равна квадрату его массы в граммах, умноженному на 100, а стоимость горного хрусталя в рублях в 3 раза больше его массы в граммах. Двое братьев получили в наследство несколько камней общей стоимостью 3 000 000 рублей. Братья распилили каждый камень пополам и взяли себе по половинке каждого камня. Оказалось, что каждый из братьев получил камней на 1 000 000 рублей. Сколько стоили изначально алмазы в наследство?

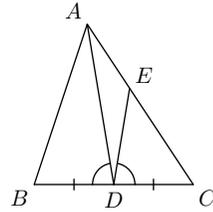
(А. Сольнин)

10. См. задачу 4.

11. В варианте олимпиады 7 задач, каждая оценивается в 8 баллов. По результатам проверки все участники набрали разное число баллов. Члены оргкомитета втихаря исправили

оценки 0 на 6, 1 на 7, 2 на 8. В результате этих махинаций участники упорядочились в точности в обратном порядке. Каким могло быть наибольшее количество участников? Приведите пример и докажите, что большее число участников невозможно. (В. Франк)

12. В треугольнике ABC проведена медиана AD . Точка E на отрезке AC такова, что $\angle ADB = \angle CDE$. Докажите, что периметр треугольника ADC больше периметра четырехугольника $ABDE$. (А. Кузнецов)



13. Два натуральных числа отличаются на 10. Десятичная запись их произведения состоит из одних девяток. Найдите эти числа. (А. Кузнецов)

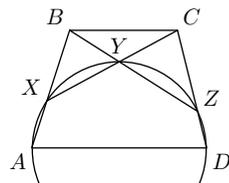
9 класс

14. Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных ненулевых целых корня a и b . Известно, что $a + p$ делится на $q - 2b$. Чему может быть равно число a ? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.) (А. Храбров, С. Берлов)

15. Сто клетчатых фанерных прямоугольников 5×6 распилили по клеточкам на куски, и из всех этих кусков составили несколько квадратов 2×2 и несколько фигурок вида . Найдите, при каком наименьшем числе кусков это возможно сделать, если куски можно поворачивать и переворачивать.

(А. Храбров)

16. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y . Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AU = DY$. (А. Кузнецов)



17. Перед открытием жилконторы к окошку в ней стояла очередь из 100 человек, и в течение дня приходили еще люди.

Когда очередной клиент подходит к окошку, работница жилконторы делит время, оставшееся до конца рабочего дня, на текущее количество человек в очереди (включая подошедшего) и обслуживает его ровно столько времени, сколько получилось в частном. Всего за день было обслужено 130 человек. Докажите, что найдутся пять клиентов, которых обслуживали одинаковое время.

(Считается, что перерыва на обед нет и что никто не становится в конец очереди в тот момент, когда очередной клиент подходит к окошку.) (Н. Власова)

18. На экране однокнопочного калькулятора горит натуральное число. Калькулятор при нажатии на кнопку заменяет число n на число $[(1 + \sqrt{3})n + \frac{1}{2}]$. Дима много раз нажимает на кнопку калькулятора, на экране одно за другим появляются числа. Докажите, что каждое следующее число на экране калькулятора равно удвоенной сумме двух предыдущих.

(А. Храбров)

10 класс

19. См. задачу 14.

20. Могут ли графики функций

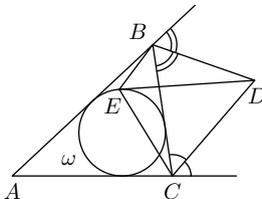
$$\begin{array}{lll} y = ax + b, & y = ax + c, & y = bx + c, \\ y = bx + a, & y = cx + a, & y = cx + b \end{array}$$

содержать стороны и диагонали некоторого четырёхугольника?

(А. Солянин)

21. Сто клетчатых фанерных прямоугольников 6×7 распилили по клеточкам на куски, и из всех этих кусков составили несколько фигурок вида  и несколько фигурок вида . Найдите, при каком наименьшем числе кусков это возможно сделать, если куски можно поворачивать и переворачивать (фигурка может быть составлена из любого числа кусков, в том числе, из одного). (А. Храбров)

22. В треугольник ABC вписана окружность ω . Известно, что $\angle A = 43^\circ$. Внешние биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ пересекаются в точке D . Из точки D проведена касательная DE к окружности ω . Найдите $\angle BEC$. (А. Кузнецов)



23. Последовательность натуральных чисел a_n задана первым членом $a_1 > 2000$ и правилом

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{если } a_n \text{ четное,} \\ 3a_n + 1, & \text{если } a_n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4. (Н. Филонов)

11 класс

24. Можно ли расставить в таблице 7×9 числа от 1 до 63 так, чтобы в каждом квадрате 2×2 сумма чисел была нечетна? (А. Храбров)

25. См. задачу 17.

26. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c , что a и b имеют ровно 1000 общих делителей, a и c имеют ровно 720 общих делителей, а a, b, c имеют ровно 350 общих делителей? (А. Солянин, Ф. Петров)

27. График кубического многочлена $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ высекает на прямой, параллельной оси абсцисс, два отрезка длины 1, а на прямой, параллельной прямой $y = x$, два отрезка, длина одного из которых равна $\sqrt{2}$. Чему может быть равна длина второго? (А. Голованов, Ф. Петров)

28. Площадь поверхности тетраэдра $ABCD$ равна S . Известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $CD = 7$, $DA = 2$. Докажите, что $S > AC \cdot BD$. (А. Кузнецов)